С.В.Карпова, Г.В.Литовка, Т.А.Маничева, А.П.Филимонова

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

ПРАКТИКУМ

Благовещенск

2001

ББК 22.15 я73

К 26

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Карпова С.В., Литовка Г.В., Маничева Т.А., Филимонова А.П.

Элементы векторной алгебры: Практикум. Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2001.

Практикум содержит краткие теоретические сведения по разделу "Векторная алгебра" курса векторной математики, а также упражнения, задачи для самостоятельной работы и некоторые физические приложения векторной алгебры. В нем представлены 25 вариантов расчетно-графической работы по векторной алгебре.

Практикум предназначен в помощь студентам I курса специальностей “0719”, “2202”, “2102”, “1001-1005”, “0102” очной и заочной формы обучения; может быть использован преподавателями.

Резензент: С.В. Ланкин, д-р физ.-мат. наук,

зав. кафедрой общей физики БГПУ.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Законы механических систем, открытые И. Ньютоном, как и все физические законы, обладают свойством инвариантности (симметрии) относительно перемещений и поворотов координатных осей. Это свойство настолько важно, что для учета его при изучении физических явлений и законов был изобретен могучий математический аппарат, который получил название “Векторное исчисление”.

В настоящее время векторное исчисление подразделяют на векторную алгебру и векторный анализ.

В векторной алгебре рассматриваются линейные операции над векторами, произведение вектора на вектор.

В векторном анализе изучаются вектор-функции или векторные функции точки. Основными понятиями векторного анализа являются градиент, дивергенция, ротор и др.

В представленном нами практикуме мы рассмотрели основы векторной алгебры, которые используются при описании таких физических понятий как скорость, ускорение, импульс, сила, работа и др.

Тема 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. Краткие теоретические сведения

Вектором называется направленный отрезок, то есть отрезок, для которого указано, какая из его концевых точек считается первой, а какая – второй.

Первая точка направленного отрезка называется началом вектора, вторая точка – концом. Обозначаются векторы (рис. 1а, 1б): **а**, **в**.., или **АВ**, **СД**.., если А – начало вектора, а В – его конец.

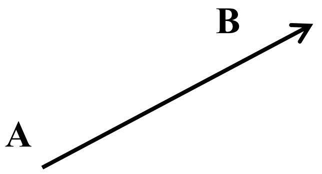


Рис. 1а.

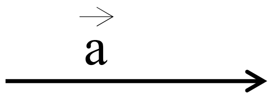


Рис. 1б.

Если точки А и В совпадают, то получаем вырожденный отрезок АВ, который изображается одной точкой (рис. 2).

● **А(В)**

Рис. 2.

Такому вырожденному отрезку соответствует вектор, начало и конец которого совпадают. Этот вектор будем называть нулевым вектором, или нуль-вектором. Обозначают его: **о** или **АА** (рис. 3).

● $\overrightarrow{\mathbf{AA}}$

Рис. 3

О направлении нуль-вектора не говорят.

Длиной (модулем) вектора **АВ** называется длина отрезка АВ. Длина нуль-вектора равна нулю.

Обозначается: $|\mathbf{AB}|$ или $|\mathbf{a}|$.

Два вектора **а**, **в** называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 4а, 4б).

Обозначаются: **а**||**в** – векторы **а** и **в** коллинеарны.

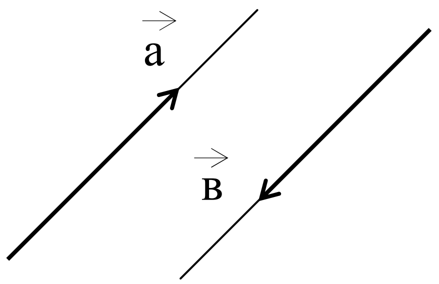


Рис. 4а.

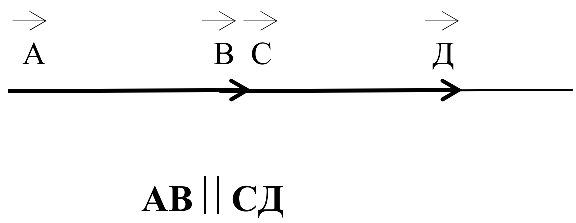


Рис. 4б.

Нуль-вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы **а**, **в**, **с** называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

Отметим, что если по крайней мере один из векторов **а**, **в**, **с** нулевой, то эти векторы компланарны (рис. 5).

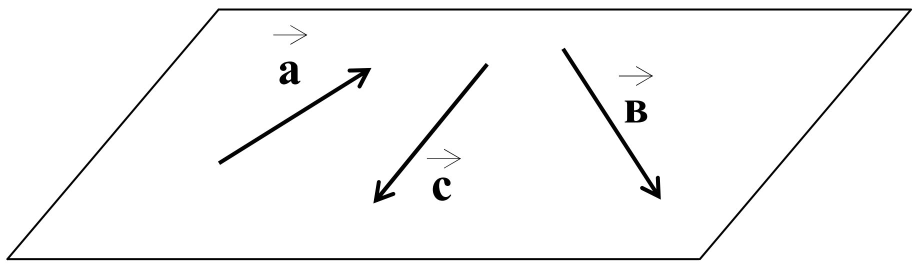


Рис. 5

Два вектора **а**, **в** называются <u>равными,</u> если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины.

Из определения равенства векторов вытекает, что каждый вектор можно единственным образом отложить от любой точки плоскости (пространства). Это означает, что если **AB** – данный вектор и A – произвольная точка, то существует единственная точка B\` такая, что вектор **A\`B\`** равен вектору **AB**.

Равенство векторов обладает свойствами:

1) **a = a** – рефлексивность;

2) если **a = в**, то **в = a** – симметричность;

3) если **a = в**, **в = с**, то **a = с** – транзитивность.

Коллинеарные векторы могут быть сонаправленными и противонаправленными. Четкие, логические определения этих категорий достаточно сложны. Поэтому ограничимся иллюстрацией (рис. 6).

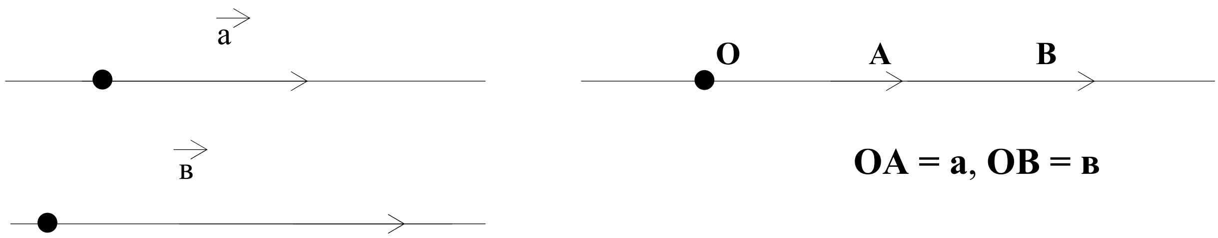


Рис. 6.

a и **в** – одинаково направленные (сонаправленные).

Обозначаются: **a**↑↑**в**.

Рис. 7.

c и **d** – противоположно направленные (противонаправленные).

Обозначаются: **c**↑↓**d** (рис. 7).

Вектор $\mathbf{a}^{|}$ называется противоположным по отношению к вектору **a**, если выполняются следующие условия (рис. 8):

1) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}^{|}|$ – длины векторов равны;

2) $\mathbf{a}^{|}$↑↓**a** – векторы противоположно направлены.

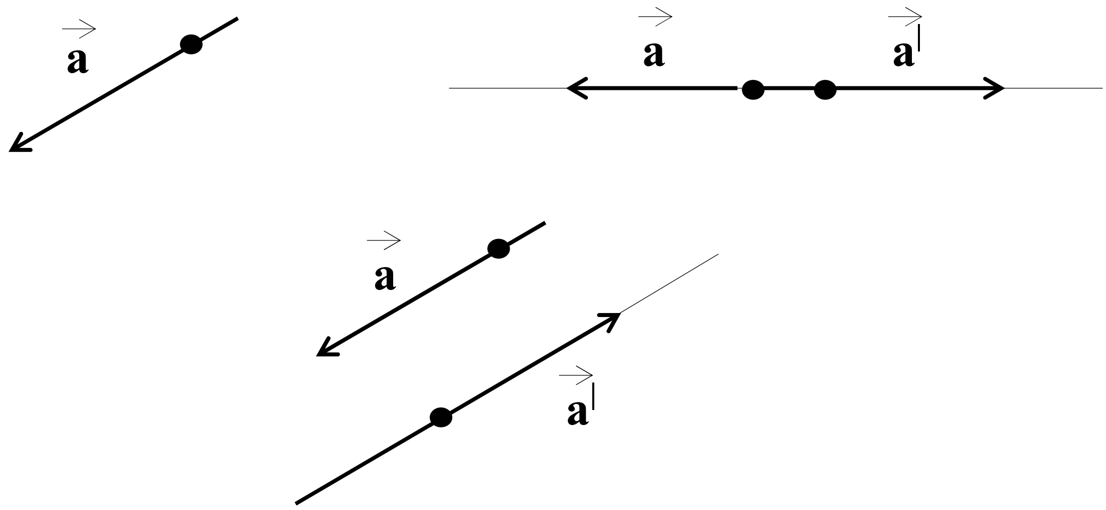


Рис. 8.

Обозначаются: $\mathbf{a}^{|} = -\mathbf{a}$.

Линейные операции над векторами: сложение векторов и умножение вектора на действительное число.

Суммой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$ называется вектор **а**, начало которого находится в начале первого вектора $\mathbf{a}_1$, а конец – в конце последнего $\mathbf{a}_n$, при условии, что начало каждого последующего вектора находится в конце предыдущего (рис. 9).

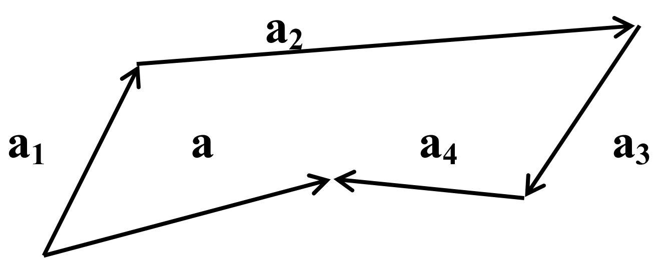
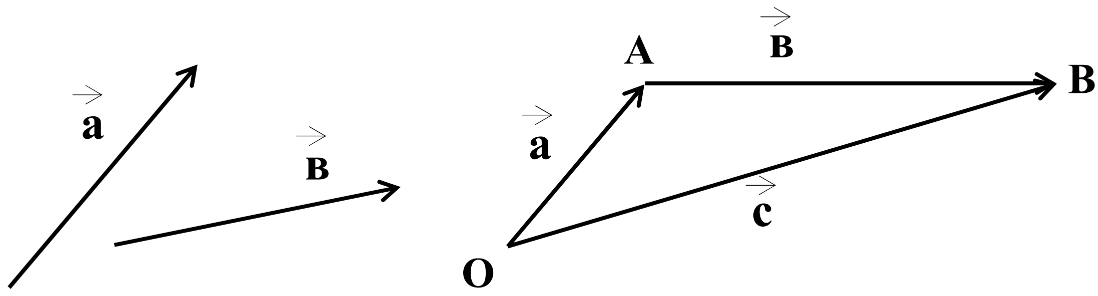


Рис. 9.

Складывать векторы **а** и **в** можно по правилам треугольника и параллелограмма.

<u>Правило треугольника.</u>

Возьмем два вектора **а** и **в** и произвольную точку О. Отложим вектор **а** от точки О, получим **АО = а**, затем от точки А отложим вектор **АВ = в**. Вектор **OB = c** называется суммой векторов **a** и **в** (рис. 10).



OA + AB = OB

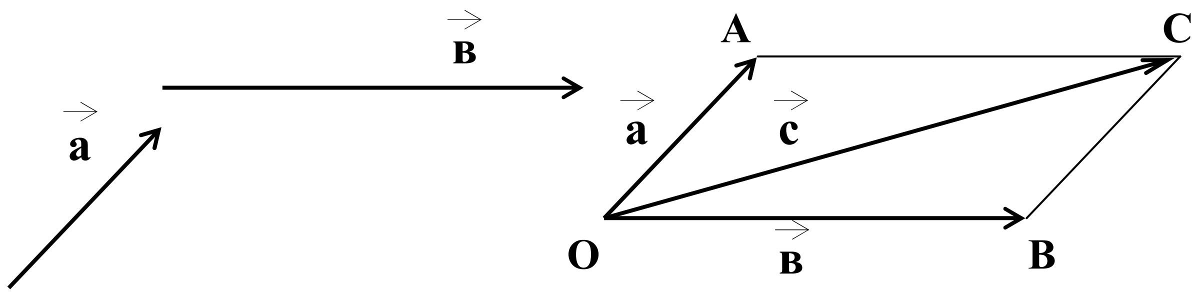
a + в = c

Рис. 10.

Сумма векторов не зависит от выбора исходной точки O.

Правило параллелограмма.

Возьмем два вектора **a** и **в** и произвольную точку O. От точки O отложим векторы **a = OA** и **в = OB** и построим параллелограмм на этих векторах как на сторонах. Тогда вектор **OC = c**, начало которого совпадает с общим началом векторов **a** и **в**, а конец – с противоположной вершиной параллелограмма, является вектором суммы данных векторов (рис. 11).



OA + OB = OC

a + в = c

Рис. 11.

В случае некомпланарных векторов **a, в** и **c** пользуются правилом параллелепипеда.

Отложим векторы от одной точки O и построим параллелепипед на этих векторах как на сторонах.

OA = а, **OB = в**, **OC = с**. Тогда **OA + OB + OC = OA + AE + ЕД = OД**.

Вектор, начало которого совпадает с общим началом векторов **а**, **в** и **с**, а конец – с противоположной вершиной параллелепипеда, является вектором суммы данных векторов (рис. 12).

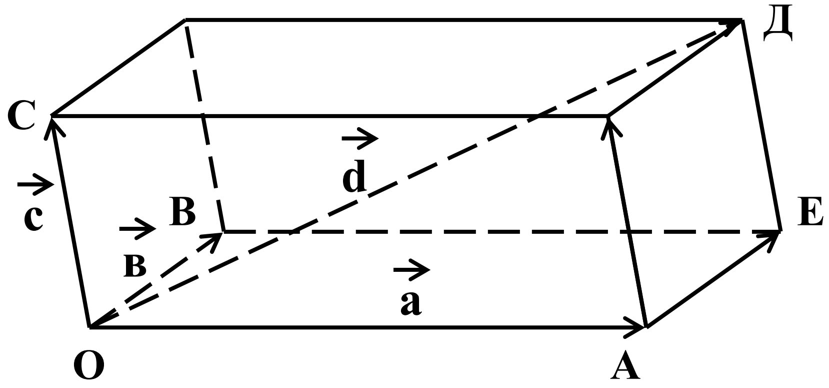


Рис. 12.

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{в} + \mathbf{c}$$

<u>Законы сложения векторов.</u>

1. Для любых векторов **а** и **в: а + в = в + а** – коммутативный закон.

2. Для любых векторов **а**, **в** и **с** : $(\mathbf{a} + \mathbf{в}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{в} + \mathbf{c})$ – ассоциативный закон.

3. Для любого вектора **а** справедливо равенство **а + о = а.**

4. Сумма двух противоположных векторов равна нуль-вектору:

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$$

Разностью векторов **а** и **в** называется такой вектор **х**, который в сумме с вектором **в** дает вектор **а**, то есть **в + х = а**. Обозначают разность векторов **а** и **в**: **а – в** (рис. 13).

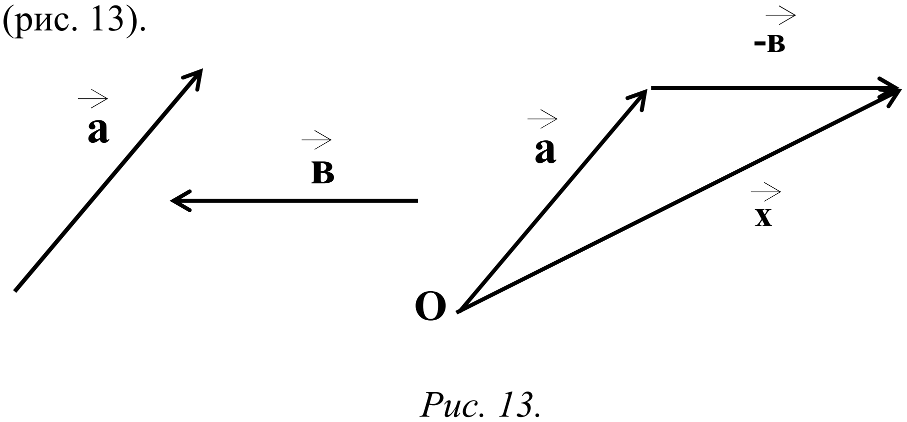


Рис. 13.

$\mathbf{a} + (-\mathbf{в}) = \mathbf{x}$ – это первый способ построения разности: по определению $\mathbf{a} - \mathbf{в} = \mathbf{x}$.

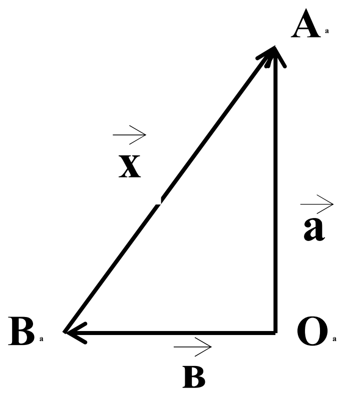


Рис. 14.

Второй способ построения разности: векторы **а** и **в** отложим от одной точки О, вектор разности соединяет их концы и направлен из конца вычитаемого в конец уменьшаемого (рис. 14).

ОА–ОВ=ВА, ОА=а – уменьшаемое; **ОВ=в** – вычитаемое; **ВА=х** – разность.

Произведением ненулевого вектора **а** на действительное число $\alpha(\alpha \neq 0)$ называется вектор $\mathbf{в} = \alpha\mathbf{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\mathbf{в}| = |\alpha| * |\mathbf{a}|$

2) $\mathbf{в} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, если $\alpha > 0$,

$\mathbf{в} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, если $\alpha < 0$.

Если $\alpha=0$ или $\mathbf{a} = \mathbf{o}$, то считают, что $0 * \mathbf{c} = \mathbf{o}$ и $\alpha * \mathbf{o} = \mathbf{o}$.

<u>Теорема 1.</u> Чтобы вектор **а** был коллинеарен ненулевому вектору **в**, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, удовлетворяющее условию $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{в}$.

<u>Теорема 2.</u> Для произвольных чисел α и β и векторов **а** и **в** имеют место утверждения:

1) $1 * \mathbf{a} = \mathbf{a}$; $(-1) * \mathbf{a} = -\mathbf{a} = \mathbf{a}^{|}$,

2) $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$,

3) $(\alpha + \beta) * \mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$,

4) $\alpha\,(\mathbf{a} + \mathbf{в}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{в}$.

Любой вектор вида $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ – произвольные действительные числа, называется <u>линейной комбинацией векторов</u> $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$.

Числа λ_i $(i = 1, n)$ называются <u>коэффициентами линейной комбинации векторов.</u> Например, $2\mathbf{a} - 5\mathbf{в} + 3\mathbf{c}$ – линейная комбинация векторов **a, в** и **c** с коэффициентами $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = 3$.

Если вектор **x** представлен в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$, то говорят, что вектор **x** разложен по этим векторам.

Например, вектор $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_5$, разложен по векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$.

<u>Теорема 3.</u> Пусть $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ – неколлинеарные векторы. Тогда всякий компланарный им вектор **a** есть линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, причем коэффициенты разложения определяются однозначно.

<u>Теорема 4.</u> Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – некомпланарные векторы. Тогда любой вектор **a** единственным образом раскладывается в их линейную комбинацию.

2. Упражнения

<u>Пример 1.</u> Дано изображение трех точек A, B, C. Сколько ненулевых векторов изображено на рисунке (рис. 15)?

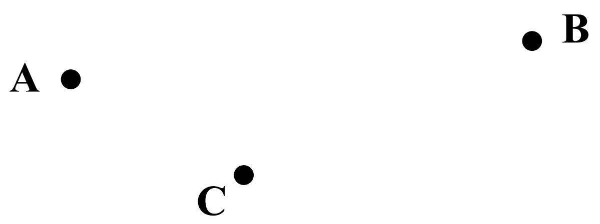


Рис. 15.

Шесть векторов: **AB**, **BA**, **AC**, **CA**, **CB**, **BC**.

Пример 2. Могут ли пары точек, одна из которых центр окружности, другая – точка окружности, определять равные векторы (рис. 16)?

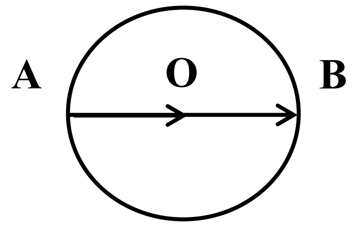


Рис. 16

Если A, O, B – точки одного диаметра окружности, то пары точек A и O, O и B определяют равные векторы: **AO = OB**.

Пример 3. Коллинеарны ли два противоположных вектора?

Два противоположных вектора коллинеарны, так как по одному из условий определения противоположные векторы являются противонаправленными.

Пример 4. АВСД – параллелограмм (рис. 17), точка М$\in$ДС. Назвать вектор, равный сумме векторов **АМ + ДМ**.

Отложим МК = ДМ. Тогда **АМ + ДМ = АМ + МК = АК**.

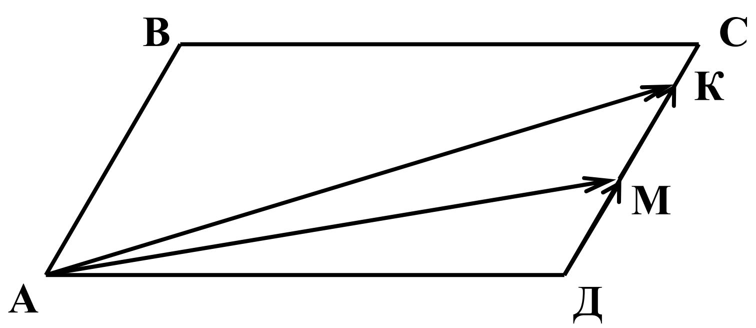


Рис. 17

Пример 5. АВСД – параллелограмм (рис. 18), точка О – точка пересечения диагоналей. Назовите вектор, равный разности векторов **СО - ОВ**.

СО = ОА. Тогда **СО - ОВ = ОА - ОВ = ВА**.

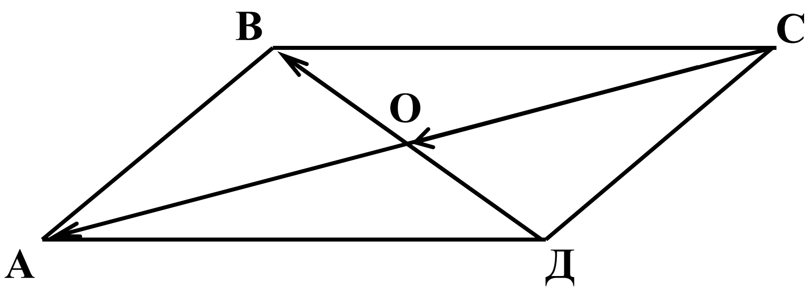


Рис. 18.

Пример 6. Какие свойства сложения и умножения вектора на число используются при доказательстве тождества: $(\mathbf{a} + \mathbf{в}) + (\mathbf{a} - \mathbf{в}) = 2\mathbf{a}$?

$(\mathbf{a}+\mathbf{в}) + (\mathbf{a} - \mathbf{в})$ = /теорема 2, утверждение 1/ = $\mathbf{a} + \mathbf{в} + \mathbf{a} - \mathbf{в}$ = /коммутативный закон сложения векторов/ = $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{в} + (-\mathbf{в}) = (\mathbf{a} + \mathbf{a}) + (\mathbf{в} + (-\mathbf{в}))$= /сумма двух противоположных векторов равна нуль-вектору/ = $(\mathbf{a} + \mathbf{a}) + \mathbf{o}$ = /закон сложения векторов 3/ = $\mathbf{a} + \mathbf{a}$ = /теорема 2, утверждение 3 / =$(1 + 1)\mathbf{a} = 2\mathbf{a}$.

Пример 7. На рис. 19 изображено несколько векторов. Указать среди них коллинеарные и компланарные векторы.

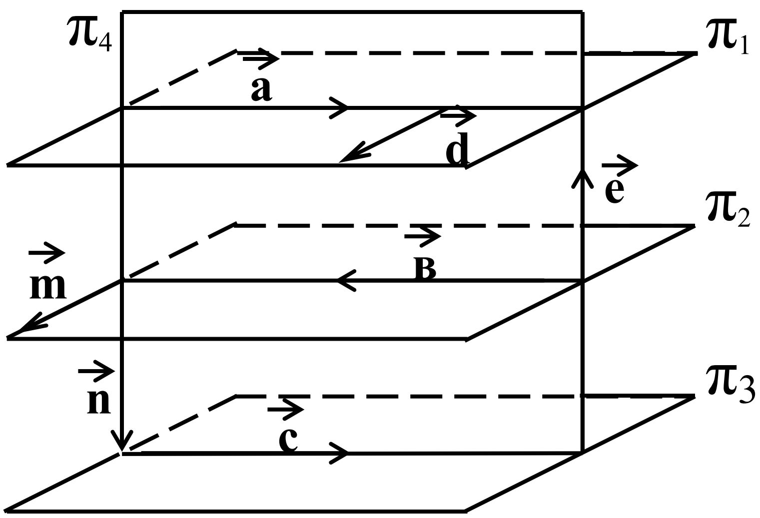


Рис. 19.

Следующие векторы коллинеарны: **а**‖**в**, **в**‖**с**, **а**‖**с**, **е**‖**n**, **m**‖**d**. Следующие векторы компланарны: **а**, **d**, **в**; **а**, **d**, **с**; **m**, **в**, **а**; **m**, **в**, **d**; **m**, **в**, **с**; **а**, **в**, **с**.

3. Упражнения для самостоятельной работы

1. Определяют ли пары точек, первая из которых центр окружности, а вторая – точка окружности, один и тот же вектор?

2. Может ли вектор **АВ+СД** быть коллинеарным вектору **АВ**?

3. АВСД – параллелограмм, О – точка пересечения диагоналей. Укажите, какие из следующих пар векторов равны, какие коллинеарны, но не равны, какие противоположны: а) **АВ** и **СД**; б) **АВ** и **ДС**; в) **ВС** и **СВ**; г) **АО** и **ВС**; д) **ОА** и **СО**.

4. В параллелограмме АВСД **АВ = m, АД = n**. Вектор **MN** имеет разложение: **MN** = –1/3**m** + 2/3**n**. Построить точки M и N, если известно, что они лежат на сторонах параллелограмма.

5. В пространстве даны три вектора, среди которых два коллинеарны. Можно ли утверждать, что все три вектора компланарны?

6. Какие свойства сложения и умножения вектора на действительное число используются при доказательстве тождества: (**а - в**)/2 + **в** = (**а + в**)/2?

7. Могут ли быть нулевыми векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, о которых говорится в условии теоремы 3?

8. Найти коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e_2}$ по векторам $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ (теорема 4).

9. Проверить на чертеже, пользуясь параллелограммом, построенным на векторах **а** и **в**, справедливость тождества: 1/2**а** + 1/2**в** = 1/2(**а** + **в**).

4. Примеры решения типовых задач.

Задача 1. АВСД – параллелограмм, О – точка пересечения его диагоналей. Построить векторы: а) **ОА + ВС + ДО + СД**, б) **ВС - ОД + ОА**.

Решение. Используя законы сложений векторов и разности векторов. (рис. 20):

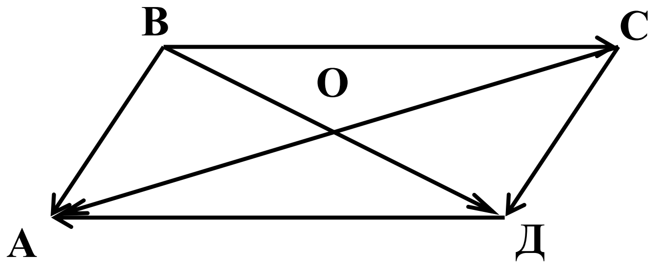


Рис. 20.

а) **ОА+ВС+ДО+СД=(ДО+ОА)+(ВС+СД)=ДА+ВД=ВА**,

б) **ВС-ОД+ОА=/ОД=ВО/=(ВС-ВО)+ОА=ОС+ОА=/ОА=СО/=ОС+СО=ОО=о**.

Задача 2. АВС – произвольный треугольник, точки Е и F – середины сторон соответственно АВ и ВС. Выразить векторы **АВ, ВС** и **АС** через **АЕ=а** и **AF=в** (рис. 21).

Решение.

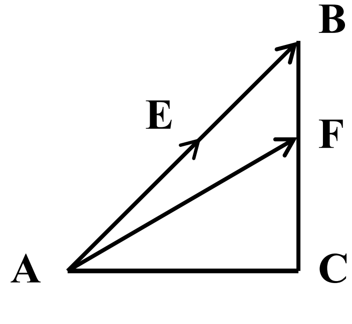


Рис. 21.

Выразим вектор **АВ**. Так как точка Е – середина АВ, то **АВ**=2**АЕ**=2**а**.

Так как F – середина ВС, то **ВС=**2**BF**, **BF=AF-AB=в**-2**а**, тогда **ВС=**2(**в**-2**а**)=2**в**-4**а**.

По правилу треугольника **АС=AF+FC=AF**+1/2**ВС=в**+1/2(2**в**-4**а**)**=в**+**в**-2**а**=2**в**-2**а**.

Ответ: **АВ** = 2**а**, **АС** = 2**в**-2**а**, **ВС** = 2**в** - 4**а**.

Задача 3. По данным векторам **а** и **в** построить вектор 3/2**а**-2**в** (рис. 22).

Решение.

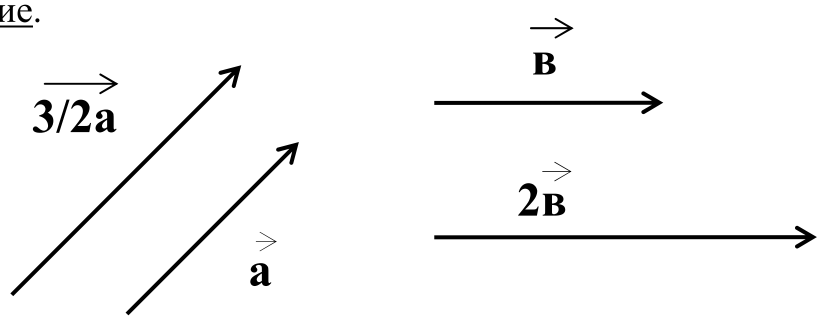


Рис. 22.

Построим вектор 3/2**а**:

1) |3/2**а**| = |3/2| ∗ |**а**| = 1,5 ∗ |**а**|,

2) 3/2**а**↑↑**а,** так как α=3/2>0.

Построим вектор 2**в**:

1) |2**в**| = |2| ∗ |**в**| =2∗ |**в**|,

2) так как 2>0, то 2**в**↑↑**в**.

Отложим векторы 3/2**а** и 2**в** так, чтобы они исходили из одной точки О. Тогда **PQ = OQ - OP** = 3/2**а - 2в** (рис. 23).

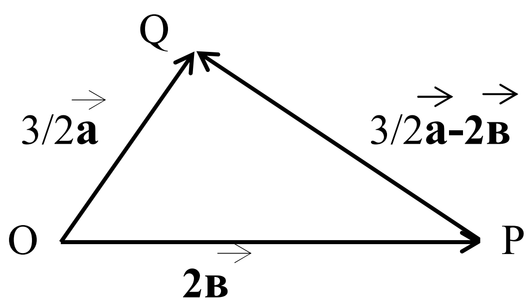


Рис. 23.

<u>Задача 4</u>. Вывести векторный признак параллелограмма.

<u>Решение</u>. Пусть АВСД – параллелограмм. Рассмотрим векторы **АВ** и **ДС** (рис. 24). Заметим, что векторы сонаправлены и модули их равны, значит **АВ=ДС**.

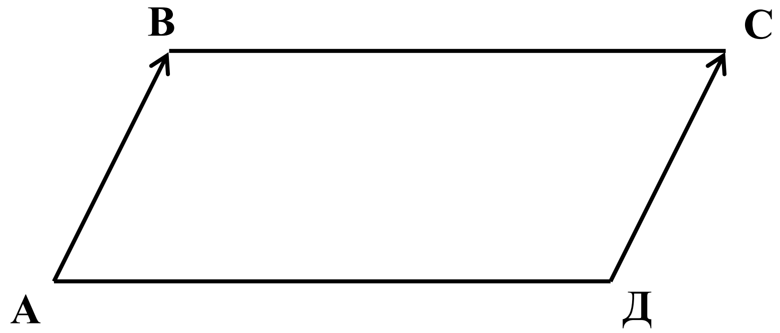


Рис. 24.

Пусть теперь в выпуклом четырехугольнике АВСД: **АВ=ДС**. Это означает, что отрезки АВ и ДС параллельны и длины их равны. Так как эти отрезки являются противоположными сторонами четырехугольника, то АВСД – параллелограмм. Итак, векторным признаком параллелограмма АВСД является равенство векторов **АВ=ДС**.

<u>Задача 5.</u> В параллелепипеде АВСД$А_1В_1С_1Д_1$ заданы векторы: **АВ = m**, **АД = n**, $\mathbf{AA_1}$ **= p** (рис. 25). Разложить векторы $\mathbf{AC_1}$ и **АК**, где К – середина ребра $СС_1$, по векторам **m, n** и **p**.

<u>Решение.</u>

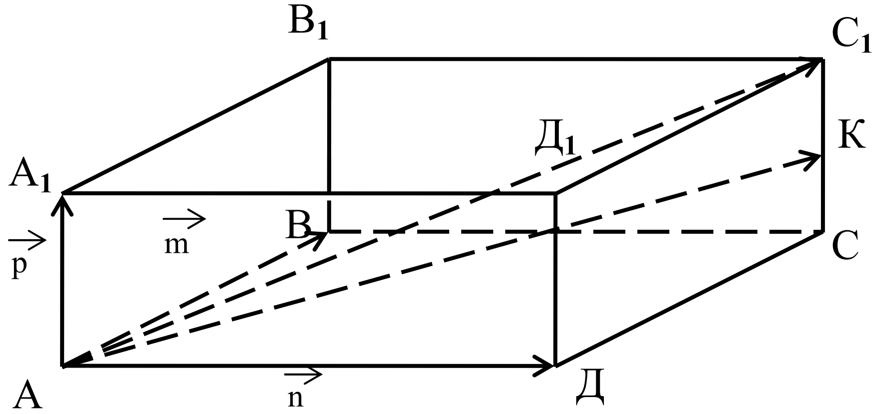


Рис. 25.

1) по правилу параллелепипеда: $\mathbf{AC_1 = AB + AД + AA_1 = m + n + p}$. Отсюда коэффициенты разложения равны соответственно 1; 1; 1;

2) используя правило треугольника и правило параллелограмма:

$\mathbf{AK = AC + CK = AC} + 1/2\mathbf{CC_1 = AB + AД} + 1/2\mathbf{AA_1 = m + n} + 1/2\mathbf{p}$, устанавливаем, что коэффициенты разложения равны соответственно 1; 1; ½.

<u>Задача 6.</u> Три силы $\mathbf{F_1, F_2, F_3}$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей $\mathbf{R}$, если известно, что $|\mathbf{F_1}| = 2$ кг, $|\mathbf{F_2}| = 10$ кг, $|\mathbf{F_3}| = 11$ кг.

<u>Решение.</u> Обозначим $\mathbf{OA = F_1}$, $\mathbf{OA = F_2}$, $\mathbf{OA = F_3}$. По правилу параллелепипеда $\mathbf{R = F_1 + F_2 + F_3 = OA + OB + OC = OK}$ (рис. 26). По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ОВД, а затем из прямоугольного треугольника ОДК находим:

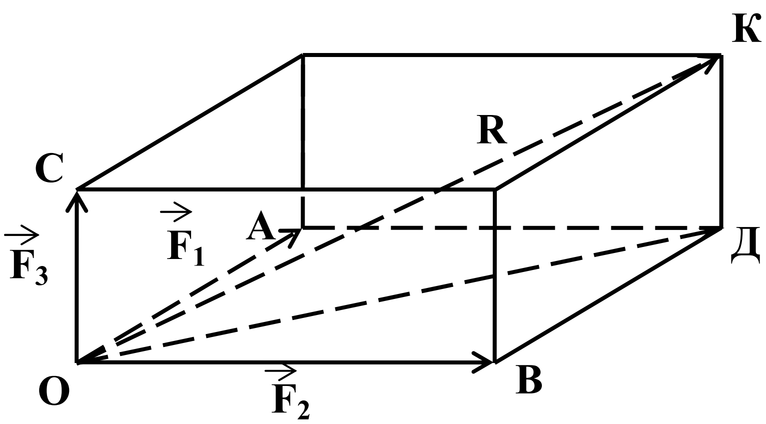


Рис. 26.

$$|\mathbf{OД}| = \sqrt{|\mathbf{OB}|^2 + |\mathbf{BД}|^2} = \sqrt{|\mathbf{OB}|^2 + |\mathbf{OA}|^2} = \sqrt{|\mathbf{F_2}|^2 + |\mathbf{F_1}|^2} =$$

$$= \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104};$$

$$|\mathbf{R}| = |\mathbf{OK}| = \sqrt{|\mathbf{OД}|^2 + |\mathbf{KД}|^2} = \sqrt{|\mathbf{OД}|^2 + |\mathbf{OC}|^2} = \sqrt{104 + 11^2}$$

$$= \sqrt{225} = 15 \text{ (кг)}.$$

Итак, $|\mathbf{R}| = 15$ кг.

5. Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть АВСД – правильный шестиугольник, О – его центр. Полагая **ОА = а**, **ОВ = в**, выразить **ОС**, **ОД**, **ОЕ**, **OF**, **АВ**, **ВС**, **ЕД**, **ЕС**, **СА**, **ДА** через векторы **а** и **в**.

2. По данным векторам **а** и **в** построить каждый из следующих векторов:

$\sqrt{2}\,\mathbf{а}$, $2\mathbf{а} + 1/4\mathbf{в}$, $-\sqrt{3}\,\mathbf{в}$, $1/5\mathbf{а} + \sqrt{3}\,\mathbf{в}$, $-3\mathbf{а} + 1/2\mathbf{в}$, $-\mathbf{а} - 1/3\mathbf{в}$.

3. АВСД – параллелограмм. Пусть **АВ=а**, **АД=в**. Разложить по векторам **а** и **в** вектор **АК**, где ВК : КС = 2 : 5.

4. Отрезок АВ разделен точками C_1, C_2, C_3 на четыре равные части. Полагая **ОА=а**, **ОВ=в**, выразить через них векторы $\mathbf{OC_1}$, $\mathbf{OC_2}$, $\mathbf{OC_3}$, где О – произвольная точка плоскости.

5. Пусть АВСДЕF – правильный шестиугольник. Найти равнодействующую сил **АВ**, **АС**, **АД**, **АЕ**, **АF**, приложенных к точке А.

6. Какому условию должны удовлетворять три вектора **а**, **в** и **с**, чтобы из них можно было образовать треугольник?

7. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника АВС (указание: выразить векторы, расположенные на сторонах треугольника).

8. Пользуясь параллелограммом, построенным на **а** и **в**, доказать геометрически справедливость тождества: $(\mathbf{а} + \mathbf{в}/2) + (\mathbf{в} + \mathbf{а}/2) = 3/2(\mathbf{а} + \mathbf{в})$.

9. Точки Е и F служат серединами сторон АВ и СД четырехугольника АВСД. Доказать, что **EF = (ВС + АД)/2**. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

10. В параллелограмме $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ заданы векторы, совпадающие с ребрами: **АВ = а**, **АД = в**, $\mathbf{АА_1} = \mathbf{с}$. Построить вектор **а** +1/2**в** + **с**.

11. В тетраэдре АВСД даны ребра, выходящие из вершины А: **АВ = в**, **АС = с** и **ОД = d**. Выразить через эти векторы остальные ребра тетраэдра, медиану **ДМ** грани ВСД и вектор **AQ**, где Q – центр тяжести грани ВСД.

12. Точки A_1, A_2, A_3 являются вершинами равностороннего треугольника, вписанного в окружность с центром С. Найти равнодействующую трех сил:

$\mathbf{F_1 = CA_1}$, $\mathbf{F_2 = CA_2}$, $\mathbf{F_3 = CA_3}$.

13. Дан треугольник АВС и произвольная точка М пространства. Доказать, что необходимым и достаточным условием того, чтобы точка О была центром треугольника АВС, является равенство: $3\mathbf{MO}=\mathbf{MA}+\mathbf{MB}+\mathbf{MC}$.

Тема 2. БАЗИС. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ДАННОМ БАЗИСЕ

1. Краткие теоретические сведения

Система векторов называется линейно зависимой, если найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots \mathbf{a_n}$ с указанными коэффициентами является нулевым вектором, то есть имеет место равенство $\alpha_1\mathbf{a_1}+\alpha_2\mathbf{a_2}+\dots+\alpha_n\mathbf{a_n}=\mathbf{o}$. Система векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots \mathbf{a_n}$ называется линейно независимой, если линейная комбинация $\alpha_1\mathbf{a_1}+\alpha_2\mathbf{a_2}+\dots+\alpha_n\mathbf{a_n}$ является нулевым вектором лишь при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 =\dots \alpha_n=0$.

Аффинным базисом плоскости называется совокупность двух неколлинеарных векторов $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$, взятых в определенном порядке. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ и $\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}$, где $\mathbf{e_1} \| \mathbf{e_2}$ образуют два различных базиса (рис. 27).

Аффинный базис плоскости называется ортонормированным, если оба вектора базиса являются единичными и взаимно перпендикулярными (рис. 28).

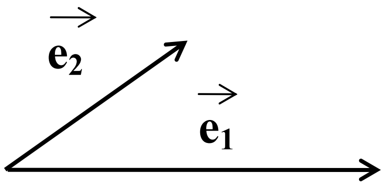


Рис. 27.

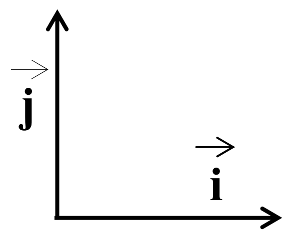


Рис. 28.

$\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ – аффинный базис

$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ – ортонормированный базис

$(\mathbf{i} = \mathbf{j} = 1;\ \mathbf{i} \perp \mathbf{j})$

Тройка некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке, называется базисом пространства (рис. 29).

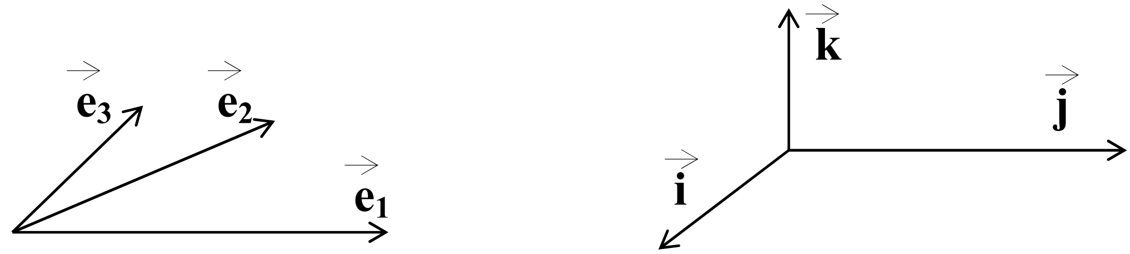


Рис. 29.

$\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ – аффинный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ – ортонормированный базис

$$\mathbf{i}\perp\mathbf{j},\ \mathbf{i}\perp\mathbf{k},\ \mathbf{j}\perp\mathbf{k},\ |\,\mathbf{i}\,| = |\,\mathbf{j}\,| = |\,\mathbf{k}\,| = 1.$$

Если на плоскости или в пространстве выбран некоторый базис, то каждому вектору плоскости (пространства) ставится в соответствие вполне определенная упорядоченная пара (упорядоченная тройка) чисел, представляющая собой совокупность коэффициентов разложения вектора по базису.

Пусть $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}$ – некоторый фиксированный базис. Тогда по теореме 3 предыдущей темы для всякого вектора **а** справедливо разложение :

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2}$$

<u>Координатами вектора в данном базисе</u> называются коэффициенты его разложения по векторам базиса

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2)_{\{\mathbf{e_1},\, \mathbf{e_2}\}} \Leftrightarrow \mathbf{a} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2}$$

(аналогично, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)_{\{\mathbf{e_1},\, \mathbf{e_2},\, \mathbf{e_3}\}} \Leftrightarrow \mathbf{a} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + a_3\mathbf{e_3}$).

При сложении векторов их соответствующие координаты складываются.

В самом деле, пусть $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + a_3\mathbf{e_3}$, $\mathbf{в} = в_1\mathbf{e_1} + в_2\mathbf{e_2} + в_3\mathbf{e_3}$. Тогда $\mathbf{a}+\mathbf{в} = (a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + a_3\mathbf{e_3}) + (в_1\mathbf{e_1} + в_2\mathbf{e_2} + в_3\mathbf{e_3}) = (a_1+в_1)\,\mathbf{e_1} + (a_2+в_2)\,\mathbf{e_2} + (a_3+в_3)\mathbf{e_3}$.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

В самом деле, пусть $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + a_3\mathbf{e_3}$. Тогда $\mu\mathbf{a} = \mu\,(a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} +$

$a_3\mathbf{e_3}) = (\mu a_1)\,\mathbf{e_1} + (\mu a_2)\,\mathbf{e_2} + (\mu a_3)\mathbf{e_3}$, что и требовалось показать.

Система координат на плоскости и в пространстве однозначно определяется заданием некоторой точки О и векторов базиса. Точка О называется началом системы координат. Прямые, проходящие через начало координат в направлении векторов базиса, называются осями координат. Различают аффинную и прямоугольную системы координат.

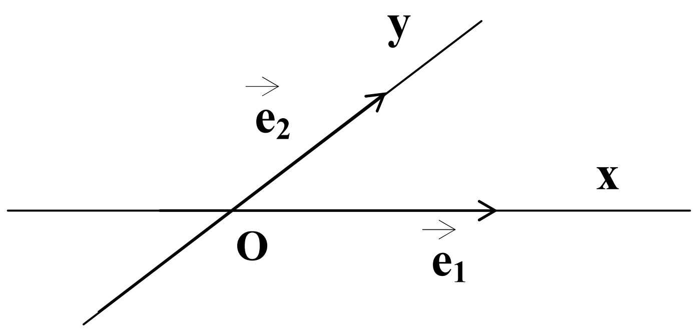


Рис. 30.

$\{O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ – аффинная система координат на плоскости (рис. 30).

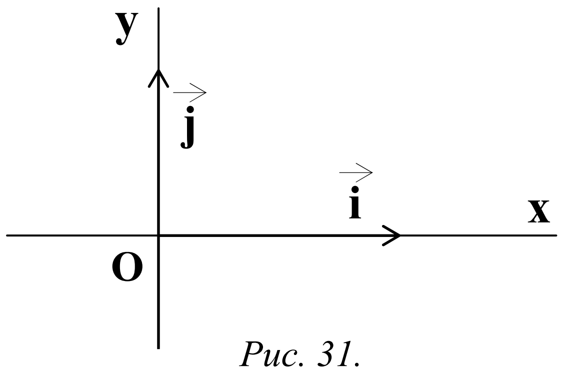


Рис. 31.

$\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ – прямоугольная система координат на плоскости (рис. 31).

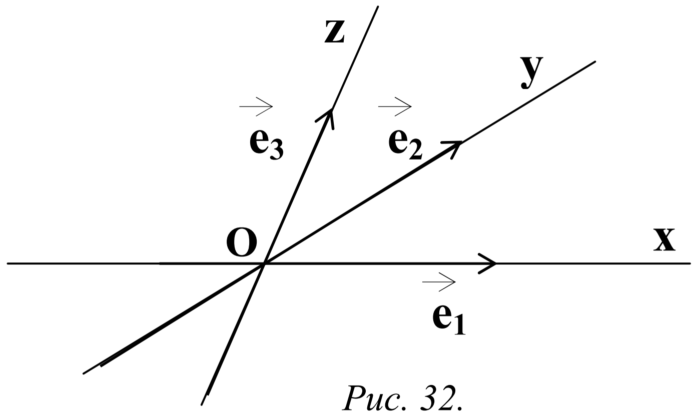


Рис. 32.

$\{O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ – аффинная система координат в пространстве (рис. 32).

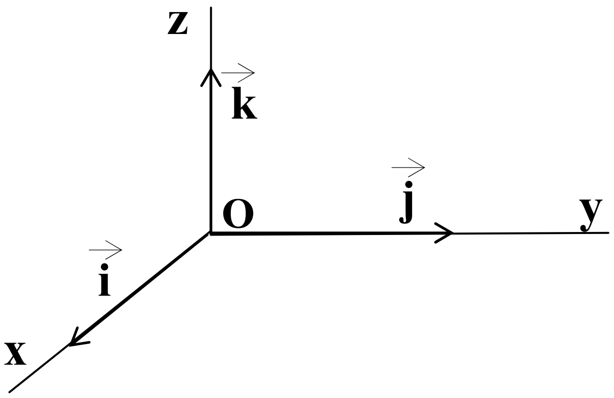


Рис. 33.

{O, i, j, k} – прямоугольная система координат в пространстве (рис. 33).

Пусть M – произвольная точка плоскости (пространства). Вектор **OM** называется радиус-вектором точки M.

Координатами точки M плоскости (пространства) в системе координат называются координаты ее радиус-вектора **OM** в соответствующем базисе.

$M\,(x, y)_{\{o\ ,\, e_1,\ e_2\}} \Leftrightarrow \mathbf{OM}\,(x, y)_{\{e_1,\ e_2\}} \Leftrightarrow \mathbf{OM} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}.$

В частности, в прямоугольной системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$

$M\,(x, y) \Leftrightarrow \mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$M\,(x, y, z)_{\{o\ ,\, e_1,\ e_2,\ e_3\}} \Leftrightarrow \mathbf{OM}\,(x, y, z)_{\{e_1,\ e_2,\ e_3\}} \Leftrightarrow \mathbf{OM} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2} + z\mathbf{e_3}$

В частности, в прямоугольной системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

$M\,(x, y, z) \Leftrightarrow \mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

x – называется абсциссой точки M, y – ее ординатой, а число z – аппликатой точки M.

Задание плоскости (пространства) системой координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости (пространства) и упорядоченными парами (упорядоченными тройками) действительных чисел.

Каждая координата вектора **AB** равна разности соответствующих координат конца B и начала A вектора **AB**.

$\mathbf{AB}=(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$, где A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) в системе координат на плоскости.

$\mathbf{AB}=(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ в системе координат в пространстве.

Расстояние между двумя точками вычисляется по формуле:

$\mathbf{AB} = \rho(A, B) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, где $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ (на плоскости).

$\mathbf{AB} = \rho(A, B) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ (в пространстве).

2. Упражнения.

Пример 1. Доказать, что два любых коллинеарных вектора линейно зависимы.

Если один из векторов нулевой, например, $\mathbf{в} = \mathbf{o}$, то равенство $0*\mathbf{a} + \lambda*\mathbf{в} = \mathbf{o}$, где $\lambda \neq 0$, очевидно. Тогда по определению система векторов **а, в** – линейно зависима.

Пусть вектор $\mathbf{a} \,||\, \mathbf{в}$ и $\mathbf{в} \neq \mathbf{o}$. Тогда по теореме существует единственное число λ такое, что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{в}$ или $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{в} = \mathbf{o}$.

Видно, что левая часть равенства представляет собой линейную комбинацию векторов **а** и **в** с коэффициентами $\alpha_1 = 1 \neq 0$ и $\alpha_2 = -\lambda$, а это означает, по определению, что система векторов **а, в,** где $\mathbf{a} \,||\, \mathbf{в}$ – линейно зависима.

Пример 2. Записать разложение вектора $-2\mathbf{a} + \mathbf{в}$ по базису $\{\mathbf{u}, \upsilon\}$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{u} + \upsilon$, $\mathbf{в} = 2\mathbf{u} + \upsilon$.

$-2\mathbf{a} + \mathbf{в} = 2(2\mathbf{u} + \upsilon) + (\mathbf{u} + 2\upsilon) = -4\mathbf{u} + 2\upsilon + \mathbf{u} + 2\upsilon = -3\mathbf{u} + 4\upsilon.$

Вектор $-2\mathbf{a} + \mathbf{в} = (-3; 4)_{\{\mathbf{u},\ \upsilon\}}$

Пример 3. Найти координаты следующих векторов в базисе $\{\mathbf{a}, \mathbf{в}, \mathbf{c}\}$: $\mathbf{a} + \mathbf{в} - \mathbf{c}$; $\mathbf{a} - 2\mathbf{в}$; $\frac{1}{2}\mathbf{a}$; $-\mathbf{в}$.

По определению координатами вектора в данном базисе являются коэффициенты разложения этого вектора по базису, следовательно:

$\mathbf{a} + \mathbf{в} - \mathbf{c} = 1*\mathbf{a} + 1*\mathbf{в} + (-1)*\mathbf{c}, \Leftrightarrow \mathbf{a} + \mathbf{в} - \mathbf{c} = (1; 1; -1)_{\{\mathbf{a}, \mathbf{в}, \mathbf{c}\}}$

$\mathbf{a} - 2\mathbf{в} = 1*\mathbf{a} + (-2)*\mathbf{в} + 0*\mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} - 2\mathbf{в} = (1; -2; 0)_{\{\mathbf{a}, \mathbf{в}, \mathbf{c}\}}$

$\frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + 0*\mathbf{в} + 0*\mathbf{c} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbf{a} = (\frac{1}{2}; 0; 0)_{\{a,\, в,\, c\}}$

$-\mathbf{в} = 0*\mathbf{a} + (-1)*\mathbf{в} + 0*\mathbf{c} \Leftrightarrow -\mathbf{в} = (0; -1; 0)_{\{a,\, в,\, c\}}$

Пример 4. Дан вектор $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ в базисе $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}\}$ векторного пространства.

А. Каковы координаты векторов **m, n, p** в базисе $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}\}$?

Б. Каковы координаты вектора **a** в базисе $\mathbf{B}^1 = \{\mathbf{p}, \mathbf{n}, \mathbf{m}\}$?

В. $\mathbf{B}_1\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – другой базис векторного пространства, относительно которого **m**=(1; 0; 2), **n**=(l; 0; -2); **p**=(1; 1; 1). Каковы координаты вектора **a** относительно базиса $\mathbf{B}_1$?

Решение. $\mathbf{a}=(\alpha, \beta, \gamma)_{\{m,\, n,\, p\}} \Leftrightarrow \mathbf{a}=\alpha\mathbf{m}+\beta\mathbf{n}+\gamma\mathbf{p}$.

А. **m** в базисе $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}\}$ имеет разложение $\mathbf{m} = 1*\mathbf{m} + 0*\mathbf{n} + 0*\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{m}(1;0;0)_{\{m,n,p\}}$

Б. $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{m}+\beta\mathbf{n}+\gamma\mathbf{p}=\gamma*\mathbf{p}+\beta*\mathbf{n}+\alpha*\mathbf{m} \Leftrightarrow \mathbf{a}=(\gamma, \beta, \alpha)_{\{p,\, n,\, m\}}$

В. $\mathbf{m}\ (1; 0; 2)_{\{e_1,\, e_2,\, e_3\}} \Leftrightarrow \mathbf{m} = 1*\mathbf{e}_1 + 0*\mathbf{e}_2 + 2*\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$

$\mathbf{n}\ (1; 0; -2)_{\{e_1,\, e_2,\, e_3\}} \Leftrightarrow \mathbf{n} = 1*\mathbf{e}_1 + 0*\mathbf{e}_2 + (-2)*\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$

$\mathbf{p}\ (1; 1; 1)_{\{e_1,\, e_2,\, e_3\}} \Leftrightarrow \mathbf{p} = 1*\mathbf{e}_1 + 1*\mathbf{e}_2 + 1*\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$

Вектор **a** в базисе $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}\}$ имеет координаты (α, β, γ), то есть

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{p}.$$

Вектор **a** в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ будет иметь следующее выражение с учетом условий для векторов **m, n, p**:

$\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3) + \beta(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3) + \gamma(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \alpha\mathbf{e}_1 + 2\alpha\mathbf{e}_3 + \beta\mathbf{e}_1 - 2\beta\mathbf{e}_3 + \gamma\mathbf{e}_1 + \gamma\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 = (\alpha+\beta+\gamma)*\mathbf{e}_1 + \gamma*\mathbf{e}_2 + (2\alpha - 2\beta + \gamma)*\mathbf{e}_3$.

Следовательно, $\mathbf{a} = (\alpha + \beta + \gamma; \gamma; 2\alpha - 2\beta + \gamma)_{\{e_1,\, e_2,\, e_3\}}$.

Пример 5. Даны векторы **a** = (-1; 2; 5), **в** = (1; 3; 7), **c** = (0; 2; 4). Определить координаты вектора $7\mathbf{a} - 5\mathbf{в} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

Решение. 7**a**=(-1*7; 2*7; 5*7)=(-7; 14; 35); 5**в**=(5*1; 5*3; 5*7)=(5; 15; 35)

$$\frac{1}{2}\mathbf{c} = (\frac{1}{2}*0;\ \frac{1}{2}*2;\ \frac{1}{2}*4) = (0;\ 1;\ 2);\ 7\mathbf{a} - 5\mathbf{в} + \frac{1}{2}\mathbf{c} =$$

$$= (-7 - 5 + 0;\ 14 – 15 + 1;\ 35 – 35 + 2) = (-12;\ 0;\ 2).$$

Итак, $7\mathbf{a} – 5\mathbf{в} + \frac{1}{2}c = (-12;\ 0;\ 2)$.

Пример 6. Даны точки A(1; 2), B(-2; 3). Найти координаты векторов **AB** и **BA**.

AB = (-2-1; 3-2) = (-3; 1); **BA** = (1-(-2); 2-3) = (3; -1). Заметим, что **AB** ≠ **BA.**

Пример 7. Даны точки P (2, x) и Q (y, 3). Найти x и y, если **PQ** = (-1; 5).

Решение. **PQ** = (-1; 5), с одной стороны, а с другой, **PQ** = (y-2, 3-x). Векторы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты. Следовательно:

y - 2 = -1 => y = 1

3 - x = 5 => x = -2

Пример 8. Построить точки M (-1; 2; -3), N (2; -1; 4).

Для построения точки M по ее координатам достаточно построить ломаную линию, состоящую из трех звеньев, параллельных соответственно осям Ox, Oy, Oz (рис. 34).

$\mathbf{OM_1} = \mathbf{-i}$, $\mathbf{M_1M_2} = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{M_2M} = -3\mathbf{k}$, $\mathbf{OM} = \mathbf{-i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{ON_1} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{N_1N_2} = \mathbf{-j}$, $\mathbf{N_2N} = 4\mathbf{k}$, $\mathbf{ON} = 2\mathbf{i} – \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

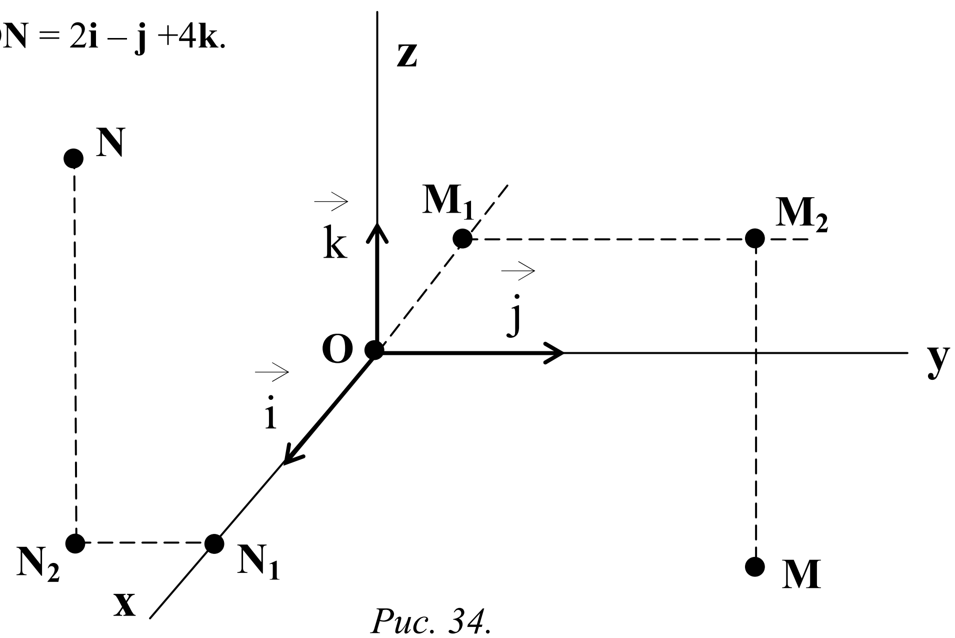


Рис. 34.

<u>Пример 9.</u> Даны вершины треугольника в прямоугольной системе координат на плоскости A(2, 1), B(-2, -2), C(10, 7). Определить длину медианы AM и длины его сторон.

<u>Решение.</u> Используем формулы $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, и так как точка M – середина BC, то ее координаты находятся следующим образом:

$$x_м = \frac{x_в + x_c}{2},\ y_м = \frac{y_в + y_c}{2}.$$

$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$. Аналогично: BC = 15, AC = 10.

$$M\left(\frac{-2+10}{2}\right),\left(\frac{-2+7}{2}\right),\ M\left(4,\ \frac{5}{2}\right).$$

$$AM = \rho\ (A, M) = \sqrt{(4-2)^2 + (\frac{5}{2}-1)^2} = \sqrt{4+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

<u>Пример 10.</u> Вычислить площадь ориентированного ΔABC: A(0, 1), B(4, 3), C(1, 1).

$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-4 + 1 - 3 - 4) = -5 < 0$. В данном случае ориентация треугольника не совпадает с ориентацией плоскости (рис. 35).

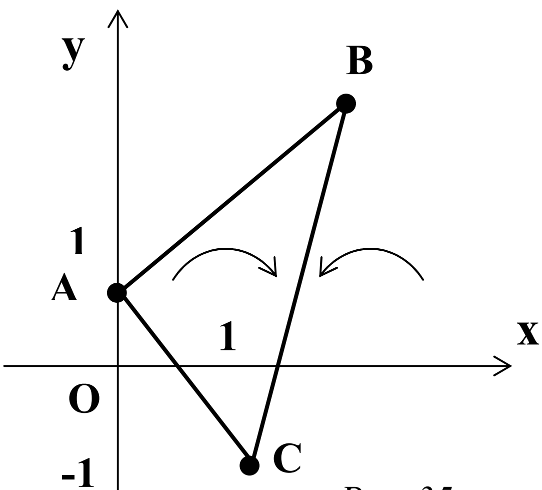


Рис. 35.

<u>Пример 11.</u> Определить координаты точки, делящей отрезок AB в отношении λ=-2. Здесь A(2; 3; -1), B(-l; 2; 0).

<u>Решение.</u> Точка M делит отрезок AB в отношении λ=-2, значит

$$x_м = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ \ y_м = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ \ z_м = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Отсюда: $x_м = \dfrac{2-2*(-1)}{1+2}$, $y_м = \dfrac{-1-2*0}{1-2}$, $z_м = \dfrac{1-2*0}{1-2}$; $x_м = -4$, $y_м = 1$, $z_м = 1$; M(-4; 1; 1).

3. Упражнения для самостоятельной работы

1. Является ли система векторов **а, в, с** линейно зависимой, если

   2**а** + **в** – **с** = **о**?

2. Доказать, что система, состоящая из одного вектора, является линейно зависимой тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

3. Даны неколлинеарные векторы **а, в**. Доказать, что система векторов **m** = 3**а - в, n** = 2**а + в, р = а** + 3**в** линейно зависимая, **n р**. Разложить вектор **m** по векторам **n** и **р.**

4. Может ли точка М прямой АВ делить отрезок АВ в отношении λ=-1?

5. Вектор **а** = (2,1) в базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$. Найти координаты вектора **а** относительно базиса $\{\mathbf{u}, \upsilon\}$, если а) $\mathbf{u} = 4\mathbf{e_1}$, $\upsilon = \frac{2}{3}\ \upsilon$,

   б) $\mathbf{u} = 4\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$, $\upsilon = -2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$.

6. Даны векторы **с** = (1; -3; 5) и **d** = (2; 0; -1). Определить координаты следующих векторов: **с + d, d - с, -**2**d,** $\frac{1}{3}$**с -** 2**d** .

7. При каком значении α векторы **а** = (α; 4; 2) и **в** = (1; а; -1) коллинеарны?

8. В базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ даны векторы **а** = (4, -2), **в** = (3, 5) и **с** = (-2, -12). Представить вектор **с** в виде линейной комбинации векторов **а** и **в.**

9. В базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ даны векторы **р** = (-3; 6; -13), **с** = (-2; 3; 0), **а** = (1; 0; -2), **в** = (1; -1; 3). Доказать, что векторы **а, в, с** образуют базис и найти координаты вектора **р** в базисе {**а, в, с** }.

10. Даны векторы **а** = (2; 3; -1), **в** = (0; 1; 3) и **с** = (1; 0; -3). Определить,

коллинеарны ли векторы $\mathbf{p}=\dfrac{3\mathbf{a}-5\mathbf{в}}{2}$ и $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{c}-2\mathbf{в}}{2}$.

11. Вычислить площадь ориентированного ΔABC: A(0, 0); B(1, 0); C(0, 1).

12. Определить координаты конца вектора **a** = (3, 4), если он приложен к точке M (-2, 3).

13. Найти отношение, в котором плоскость yOz делит отрезок AB**:** A(2; 3; -1) и B(4; 0; 2).

14. Проверить, какой из векторов **p** и **q** длиннее и во сколько раз, если **p**=(-4; 2; -6), **q** = (2; -1; 3).

4. Примеры решения типовых задач

Задача 1. Пусть ABC– произвольный треугольник, точки E и F – середины сторон AB и BC. Выразить векторы **AB**, **BC** и **AC** через векторы **AE = a** и **AF = в** и найти координаты этих векторов в базисе **{a, в, c}**.

Решение. Так как векторы **AE** и **AF** неколлинеарны, то они являются векторами базиса плоскости (рис. 36).

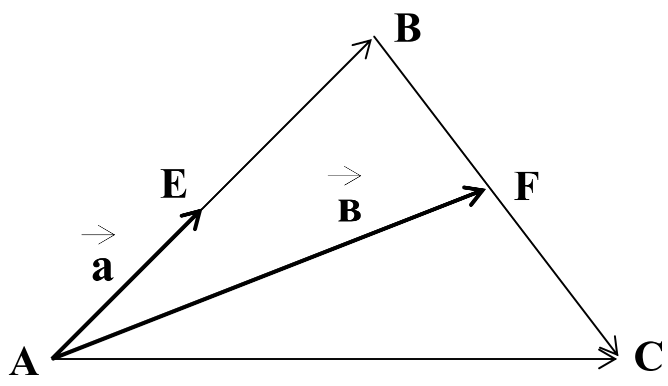


Рис. 36.

Тогда **AB** = 2**a** (E – середина AB). Вектор **BF = AF – AB = в -** 2**a; BC** = 2**BF =** 2**(в -** 2**a)** = 2**в - **4**a = -**4**a** + 2**в**.

По правилу сложения векторов имеем:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AF} + \mathbf{FC} = \mathbf{AF} + \frac{1}{2}\mathbf{BC} = \mathbf{в} + \frac{1}{2}(-4\mathbf{a} + 2\mathbf{в}) = \mathbf{в} - 2\mathbf{a} + \mathbf{в} = -2\mathbf{a} + 2\mathbf{в}.$$

Таким образом, $\mathbf{AB} = 2\mathbf{a} = 2\mathbf{a} + \mathbf{0}*\mathbf{в} \Leftrightarrow \mathbf{AB} = (2;\,0)_{\{\mathbf{a},\,\mathbf{в}\}}$;

$\mathbf{BC} = -4\mathbf{a} + 2\mathbf{в} \Leftrightarrow \mathbf{BC} = (-4; 2)_{\{\mathbf{a},\, \mathbf{в}\}}$; $\mathbf{AC} = -2\mathbf{a} + 2\mathbf{в} \Leftrightarrow \mathbf{AC} = (-2; 2)_{\{\mathbf{a},\, \mathbf{в}\}}$.

Задача 2. Дан ортонормированный базис, векторы $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\upsilon = \mathbf{k}$, $\omega = -8\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$. Выяснить, является ли система векторов $\mathbf{u}$, υ, ω линейно зависимой, то есть $\alpha\mathbf{u} + \beta\upsilon + \gamma\omega$ равно 0 при условии, что хотя бы одно из чисел α, β и γ отлично от нуля.

Получаем:

$\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{k} + \gamma(-8\mathbf{i} - 3\mathbf{k}) = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{k} - 8\gamma\mathbf{i} - 3\gamma\mathbf{k} = \mathbf{i}(\alpha-8\gamma) + \mathbf{k}(\beta - 3\gamma) + 0*\mathbf{j}$;

$(\alpha - 8\gamma)\,\mathbf{i} + (\beta - 3\gamma)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$; $(\alpha-8\gamma)\,\mathbf{i} + 0*\mathbf{j} + (\beta - 3\gamma)\,\mathbf{k} = 0*\mathbf{i} + 0*\mathbf{j} + 0*\mathbf{k}$,

то есть $\begin{cases} \alpha - 8\gamma = 0 \\ 0 = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha - 8\gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$.

Очевидно, система допускает ненулевые решения, так как число уравнений (два уравнения) меньше числа неизвестных α, β и γ ($n = 3$). Поэтому уравнение $(\alpha - 8\gamma)\,\mathbf{i} + (\beta - 3\gamma)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$; $(\alpha-8\gamma)\,\mathbf{i} + 0*\mathbf{j} + (\beta - 3\gamma)\,\mathbf{k} = 0*\mathbf{i} + 0*\mathbf{j} + 0*\mathbf{k}$ выполняется при некоторых α, β и γ не равных одновременно 0, то есть система векторов $\mathbf{u}$, υ, ω линейно зависима.

Задача 3. Определить начало вектора $\mathbf{c} = (-2, 1, 0)$, если его конец совпадает с точкой (3, 2, 1).

Решение. Пусть вектор $\mathbf{c} = \mathbf{AB}$, тогда по условию B(3; 2; 1), а точка A(x; y; z). Отсюда $\mathbf{c} = (3-x; 2-y; 1-z)$, но вектор $\mathbf{c} = (-2; 1; 0)$.

Следовательно, $\begin{cases} 3 - x = -2 \\ 2 - y = 1 \\ 1 - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Началом вектора $\mathbf{c} = (-2; 1; 0)$ является точка A(5; 1; 1).

Задача 4. Даны вершины однородной треугольной пластинки A(-4; -1; 2), B(3; 5; -16), C(l; -8; 2). Определить координаты ее центра тяжести.

Решение. Центр тяжести пластинки находится в точке пересечения медиан ΔABC и находится по формулам: $x = \frac{x_A + x_B + x_c}{3}$, $y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$,

$z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$. Следовательно, $x = \frac{-4+3+1}{3} = 0$, $y = \frac{-1+5-8}{3} = -\frac{4}{3}$,

$z = \frac{2-16+2}{3} = -4$. Центр тяжести однородной пластины – это точка

$(0;\ -\frac{4}{3};\ -4)$.

<u>Задача 5.</u> Даны две смежные вершины параллелограмма A(-4, 4) и B(2, 8), точка M(2, 2) пересечения его диагоналей (рис. 37). Определить вершины C и Д. Вычислить длины сторон параллелограмма АВСД.

<u>Решение.</u>

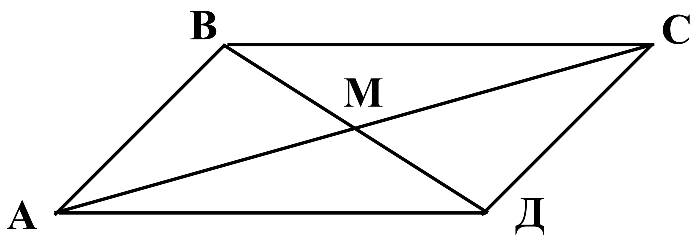


Рис. 37.

По свойству параллелограмма точка M делит отрезки AC и ВД пополам, то есть является серединой AC и ВД, тогда $x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$

и $x_M = \frac{x_B + x_Д}{2}$, $y_M = \frac{y_B + y_Д}{2}$.

$2 = \frac{-4 + x_C}{2} \Rightarrow$ $-4+x_C$ $x_C=8$, $2 = \frac{-4 - y_C}{2} \Rightarrow$ $-4+y_C = 4$ $y_C = 0$

Итак, вершина C(8, 0).

Далее $2 = \frac{2 + x_Д}{2} \Rightarrow \frac{2 + x_Д = 4}{x_Д = 2}$, $2 = \frac{8 + y_Д}{2} \Rightarrow \frac{8 + y_Д}{y_Д = -4}$

Вершина Д(2, -4).

Вычислим длины сторон параллелограмма:

АВ = СД, то есть ρ(А, В) = ρ(С, Д);

ВС = АД, то есть ρ(В, С) = ρ(А, Д).

Следовательно, ρ(А, В) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,

ρ(А, В) = $\sqrt{(2-(-4))^2 + (8-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13},$

ρ(А, В) = $\sqrt{(8-2)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36+64} = 10.$

Ответ: С(8; 0) АВ = СД = $2\sqrt{13}$

Д(2, -4) ВС = АД = 10

5. Задачи для самостоятельной работы

1. В треугольнике АВС проведена биссектриса АД. Найти координаты вектора **АД** в базисе **{АВ, АС}.**

2. Дан ортонормированный базис **{i, j, k}.** Выяснить, является ли система векторов $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ линейно зависимой, если векторы в данном базисе заданы своими координатами $\mathbf{a_1} = (0; 4; 3)$, $\mathbf{a_2} = (3; 3; 2)$, $\mathbf{a_3} = (8; 1; 3)$.

3. Проверить, коллинеарны ли векторы **m** и **n**. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, определить, сонаправлены они или нет: $\mathbf{m} = (\frac{1}{2}; 0; 1)$, $\mathbf{n} = (4; 0; 8)$.

4. Даны четыре вектора **a, b, c, d** . Написать разложение каждого из них, принимая в качестве базиса три остальных: **a** = (-5; 5; -7), **в** = (0; 1; -3), **c** = (2; -1; 1), **d** = (1; 0; 2).

5. Записать формулы для вычисления расстояния постоянной точки M(x, y, z) до координатных плоскостей.

6. Даны концы A(3, -5), D(-l, l) однородного стержня. Определить координаты его центра тяжести (центр тяжести однородного стержня находится в середине стержня).

7. Пользуясь теоремой, обратной теореме Пифагора, вычислением убе-

диться в том, что ΔABC, заданный координатами вершин A(1, 1), B(2, 5), C(-6, 7), является прямоугольным. Указать вершину прямого угла.

8. В ΔABC: A(5, -4) , B(-1, 2), C(5, 1). Определить площадь треугольника и центр его тяжести.

9. Проверить, является ли трапецией фигура ABCД, если A(0, 1, 2), B(-1, 0, 1), C(2, 1, 4), D(6, 3, 8).

10. При каких α и β векторы **a** и **b** коллинеарны, если $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

11. Найти координаты вершин треугольника, если середины его сторон находятся в точках $(2, \frac{1}{2})$, (5, 1), $(4, -\frac{5}{2})$.

12. Даны две противоположные вершины квадрата A(-1, 4) и C(7, -2). Найти две другие вершины.

13. На прямой взяты последовательно точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. $A_2(2, 5)$, $A_5(1, 7)$. Определить отношения, в которых точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 делят отрезок A_2A_5, и координаты этих точек.

14. В ΔABC: A(4, 1), D(7, 5), C(-4, 7). Вычислить длину биссектрисы АД угла А.

15. В точках A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2), C (x_3, y_3, z_3) сосредоточены массы m_1, m_2, m_3, причем $m_1 + m_2 + m_3 > 0$. Найти координаты центра тяжести этой системы масс.

Тема 3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Краткие теоретические сведения

<u>Скалярным произведением</u> двух ненулевых векторов **а** и **в** называется число, равное произведению длин этих векторов и косинуса угла между ними.

Если хотя бы один из векторов **а** и **в** нулевой, то скалярное произведение этих векторов по определению равно нулю. Скалярное произведение векторов **а** и **в** будем обозначать: **(а, в)**, **а∗в**, таким образом,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{в}) = |\mathbf{a}| * |\mathbf{в}| * \cos(\mathbf{a},\mathbf{в}), \ \mathbf{a} \neq \mathbf{o} \text{ и } \mathbf{в} \neq \mathbf{o}.$$

Имеют место утверждения:

1. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.

2. Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0.

Операция скалярного умножения векторов обладает свойствами: а) **(а, в) = (в, а);** б) α**(а, в) = (**α**а,** α**в),** $\alpha \in \mathbf{R}$**;** в) **(а + в, с) = (а, с) + (в, с).**

Из этих свойств следует, что и **(а,** α**в) =** α**(а, в), (а, в + с) = (а, в) + +(а, с).**

Если векторы **а** и **в** заданы своими координатами в ортонормированном базисе **{i, j, k},** то скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат; **а** и **в, (а, в)** = $a_1в_1 + a_2в_2 + a_3в_3$, где **а** = (a_1, a_2, a_3), **в** = $(в_1, в_2, в_3)$. Отсюда следуют формулы для вычисления длины вектора и косинуса угла между векторами:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{в}) = (a_1в_1 + a_2в_2 + a_3в_3) / (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} * \sqrt{в_1^2 + в_2^2 + в_3^2}).$$

Проекция вектора **а** на ось, имеющую направление вектора **в,** вычисляется по формуле: $\mathrm{pr}_{\mathbf{в}}\mathbf{a} = \dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{в})}{|\mathbf{в}|}$

В частности, проекции вектора **а** на координатные оси, то есть $\mathrm{pr}_{\mathbf{i}}$ **а**, $\mathrm{pr}_{\mathbf{j}}$ **а** есть координаты вектора **а,** так как **(а, i)** = a_1, **(а, j)** = a_2, **(а,k)** = a_3.

Обозначим углы **(а, i)** = α, **(а, j)** = β, **(а, k)** = γ. Направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ вектора **а** можно вычислить по формулам:

$$\cos\alpha = a_1/|\mathbf{a}|, \ \cos\beta = a_2/|\mathbf{a}|, \ \cos\gamma = a_3/|\mathbf{a}|.$$

2. Упражнения

Пример 1. Вычислить скалярное произведение векторов **a** = 3**i** + 4**j** + 7**k**, **в** = 2**i** - 5**j** + 2**k**.

Запишем координаты векторов **a**(3; 4; 7), **в**(2; –5; 2), тогда **(a, в)** = 3∗2+ 4 ∗(-5) + 7∗2 = 0.

Пример 2. Даны векторы **a** = (-1, 5), **в** = (3, 5), **c** = (-2, 8), **d** = (3, 1).

Вычислить **(a - в, c - d).**

a – в = (-1 -3; 5- 5) = (-4, 0), **c – d** = (-2 - 3, 8 - 1) = (-5, 7).

Следовательно, **(a - в, c - d)** = (-4) ∗ (-5) + 0∗7 = 20.

Пример 3. Вычислить угол между векторами **a = (-**$\sqrt{3}$, 3**)**, **в** = (0, 1).

Воспользуемся формулой для вычисления косинуса угла между векторами:

cos **(a,в)** = ((-$\sqrt{3}$)∗0 + 1∗3)/($\sqrt{3+9}$ ∗$\sqrt{0+1}$) = 3/2$\sqrt{3}$ =$\sqrt{3}$ /2.

Отсюда **(a,в)** = 30°.

Пример 4. Векторы **a** и **в** образуют угол φ = π / 6, |**a**| = 2, |**в**| =$\sqrt{3}$. Найти |**a** - 3**в**|. Так как квадрат модуля вектора равен скалярному квадрату этого вектора, то |**a - в**| = $\sqrt{(\mathbf{a} - 3\mathbf{в})^2}$ = $\sqrt{(\mathbf{a} - 3\mathbf{в}, \mathbf{a} - 3\mathbf{в})}$. Вычислим **(a -** 3**в, a -** 3**в**), пользуясь свойствами операции скалярного умножения и определения скалярного произведения:

(a - 3**в, a -** 3**в)** = **a**^{2} - 3(**a, в**) - 3(**a, в**) + 9**в**^{2}= |**a**| ^{2} - 6(**a, в**) + 9|**в**|^2 = |**a**|^2 - 6|**a**| |**в**| cos (**a, в**) + 9|**в**|^2= 4 - 6 ∗ 2 ∗ $\sqrt{3}$ ∗ $\sqrt{\frac{3}{2}}$ + 9 ∗ 3 = 13.

Отсюда |**a** – 3**в**| = 13.

Пример 5. При каком значении параметра α ортогональны векторы **a** = 3**i** + α**j** - **k** и **в** = 2α**i** + **j** - 3α**k**?

Имеем **a** = (3, α, -1)**, в** = (2α, 1, -3α**)**. Параметр α найдем из соотношения **(a, в)** = 0, так как **a ≠o, в ≠ o**. **(a, в)** = 6α + α + 3α = 10α. Следовательно, α = 0.

<u>Пример 6.</u> Вычислить проекцию **a** = 2**i** + 3**j** + **k** на ось вектора **в** = **i** - 2**j** + 2**k.**

Имеем $\text{pr}_\mathbf{b}\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{в}) / |\mathbf{в}|$. Так как **a** = (2; 3; 1), **в** = (1; -2; 2), то

$|\mathbf{в}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $(\mathbf{a}, \mathbf{в}) = 2*1 + 3*(-2) + 1*2 = -2$, отсюда $\text{pr}_\mathbf{в}\,\mathbf{a} = -2/3$.

<u>Пример 7.</u> Найти направляющие косинусы вектора **a** = (2, -2, 1).

$\cos\alpha = a_1/|\mathbf{a}| = 2/\sqrt{4+4+1} = 2/3$, $\cos\beta = a_2/|\mathbf{a}| = -2/3$,

$\cos\gamma = a_2/|\mathbf{a}| = 1/3$.

3. Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить длину **c** = 2**a** - 3**в**, если **a** = **i** - 2**j**, **в** = 4**i** + 5**j**.

2. Дано: $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{в}| = 3$, $\mathbf{a}\perp\mathbf{в}$. Вычислить (2**a** - **в**, 5**a** + 3**в**).

3. Вычислить угол между векторами **a** = 6**i** + 4**j** - 2**k**, **в** = **i** + 2**j** + 3**k.**

4. Найти проекцию вектора **a** = (-7, - 3) на ось вектора **в** = (3, 5).

5. Дано: $|\mathbf{a}| = 4$, $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = 2\pi/3$. Найти координаты вектора **a**.

6. Найти вектор **x**, коллинеарный вектору **a** = (1; 1; -2), если (**x**, **a**) = 3.

7. Дано: **a** = (3, 4), **в** = (-3, 1), **c** = (2, 2), **d** = (1, -1).

Вычислить (**a** + **в** + **c**, **d**).

4. Примеры решения типовых задач

<u>Пример 1.</u> Дано: **a** = (2; -1; 5), **в** = (3; 1; 1). Найти **x**, если (**x**, **к**) = 0, (**x**, **a**) = 1, (**x**, **в**) = 4.

<u>Решение.</u> Пусть вектор **x** имеет координаты x_1, x_2, x_3: **x** = (x_1, x_2, x_3). Тогда (**x**, **к**) = $0*x_1 + 0*x_2 + 1*x_3$, (**x**, **a**) = $2x_1 - x_2 + 5x_3$, (**x**, **в**) = $3x_1 + x_2 + x_3$.

Из условия задачи следует: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Решая эту систему линейных уравнений, получаем **x** = (1; 1; 0).

<u>Пример 2.</u> Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах **a** = (2; 1; 0) и **в** = (0; -2; 1) (рис. 38).

Решение.

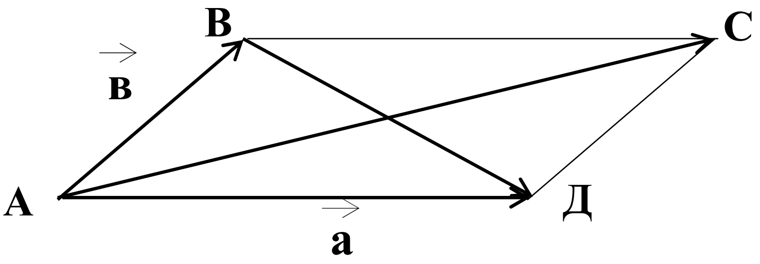


Рис. 38.

AC = AB + AД = a + в = (2, -1; 1); **ВД = АД – АВ = а – в =** (2; 3; -1).

cos (**AC**,^**ВД**) = $(2 * 2 - 1 * 3 - 1 * 1) / \sqrt{4 + 1 + 1} * \sqrt{4 + 9 + 1} = 0$.

(**AC, ВД**) = $\pi/2$.

Пример 3. Известно, что **p = s +** 2**t, g =** 5**s -** 4**t** взаимно перпендикулярны. Какой угол образуют единичные векторы **s** и **t**?

Решение. По условию **(p, g)** = 0. Имеем:

$(\mathbf{s} + 2\mathbf{t}, 5\mathbf{s} - 4\mathbf{t}) = 5\mathbf{s}^2 + 10(\mathbf{t}, \mathbf{s}) - 4(\mathbf{s}, \mathbf{t}) - 8\mathbf{t}^2 = 5|\mathbf{s}|^2 + 6|\mathbf{s}| * |\mathbf{t}| * \cos(\mathbf{s},\mathbf{t}) - 8|\mathbf{t}|^2 = 0$,

$\cos(\mathbf{s},\mathbf{t}) = 1/2$, $(\mathbf{s},\mathbf{t}) = 60° = \pi/3$.

Пример 4. Векторным методом доказать, что диагонали прямоугольника равны (рис. 39).

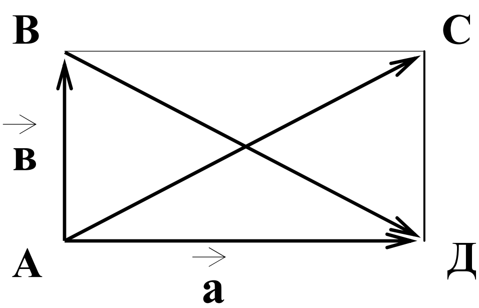


Рис. 39.

Решение.

AC = a + в; ВД = a - в.

$|\mathbf{AC}| = \sqrt{\mathbf{AC}^2} = \sqrt{(\mathbf{AC}, \mathbf{AC})} = \sqrt{(\mathbf{a}+\mathbf{в}, \mathbf{a}+\mathbf{в})} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{в}) + (\mathbf{в}, \mathbf{a}) + \mathbf{в}^2} =$

$\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{в}^2}$, так как **(а, в) = (в, а) =** 0 вследствие условия **а⊥в.** Аналогично:

$|\mathbf{ВД}| = \sqrt{\mathbf{ВД}^2} = \sqrt{(\mathbf{ВД}, \mathbf{ВД})} = \sqrt{(\mathbf{а} - \mathbf{в}, \mathbf{а} - \mathbf{в})} = \sqrt{\mathbf{a}^2 - (\mathbf{а}, \mathbf{в}) - (\mathbf{в}, \mathbf{а}) + \mathbf{в}^2} =$

$= \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{в}^2}$. Следовательно, $|\mathbf{АС}| = |\mathbf{ВД}|$ **.**

5. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти единичный вектор **р**, одновременно перпендикулярный **а** = (3; 6; 8) и оси абсцисс.

2. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на **а =** 5**р** + 2**g, в = р -** 3**g,** если $|\mathbf{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{g}| = 3$, **(р, g)** = π/4.

3. Определить координаты вектора **m**, если $|\mathbf{m}| = 3$, **(i, m) =** 30°.

4. Векторным методом доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

5. Векторным методом доказать теорему Пифагора.

6. Даны **а** = (2, -1), **в =** (0, 1). Найти **х**, если **(х, а)** = 3, **(х, в)** = -1.

7. АВСД – квадрат, длина стороны которого равна $|\mathbf{a}| = 3$. Найти **(ВА, ДВ)** и **(АВ + АД, ДС).**

8. Доказать векторным методом, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

9. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

10. Зная, что $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{в}| = 5$, **(а,в)=**2π/3, определить, при каком λ векторы **р = λа** + 17**в** и **g =** 3**а - в** окажутся перпендикулярными.

11. В ΔАВС: АК – медиана, **АВ = m + n**, **АС = m -** 3**n**, $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, **(m,n)** = π/4.

Определить угол **(АК, ВС).**

12. Два вектора **m =** (2; 6; 3) и **n =** (-6; 3; 2) приложены к одной точке. Определить координаты вектора **р,** направленного по биссектрисе угла меж-

ду векторами **m** и **n** , при условии, что $|\mathbf{p}| = \sqrt{122}$.

13. Вектор **m** составляет с координатными осями Ох, Oz углы α и γ соответственно. Вычислить его координаты, если $\alpha = \pi/3$, $\gamma = \arccos 1/3$, **m** = $6\sqrt{23}$.

14. Единичные векторы **а, в, с** удовлетворяют условию **а + в + с = о**.

Вычислить **а** * **в** + **в** * **с** + **с** * **а**.

15. Даны компланарные векторы **а, в, с.** Найти длину **р = а + в - с,** если $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{в}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 5$, (**а,в**) = (**в,с**) = 60°.

Тема 4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Краткие теоретические сведения

Упорядоченную тройку некомпланарных векторов **а, в, с** назовем правой (рис. 40а), если кратчайший поворот от вектора **а** к вектору **в** из конца вектора **с** виден совершающимся против часовой стрелки. Если же указанный поворот совершается по часовой стрелке, то упорядоченная тройка **а, в, с** – левая (рис. 40б).

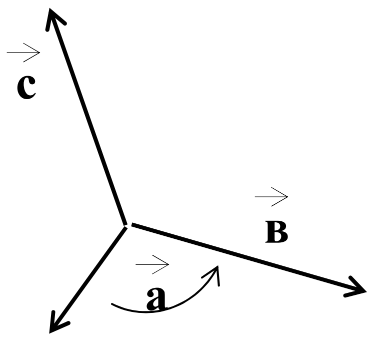


Рис. 40а.

а, в, с – правая тройка

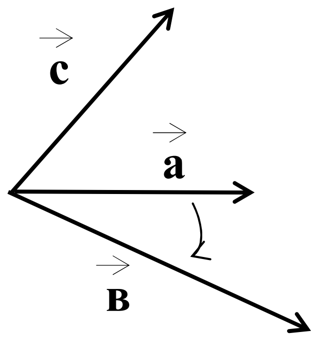


Рис. 40б.

а, в, с – левая тройка

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов **а** и **в** называется вектор, обозначаемый **[а, в],** или **а×в,** и удовлетворяющий следующим условиям:

1) **[а, в]** = $|\mathbf{а}| * |\mathbf{в}| *$ **sin(а, в)(0<(а,в)< π);** 2) **[а, в]⊥а, [а, в]⊥в,** 3) **а, в, [а,в] –** правая тройка векторов (рис. 41).

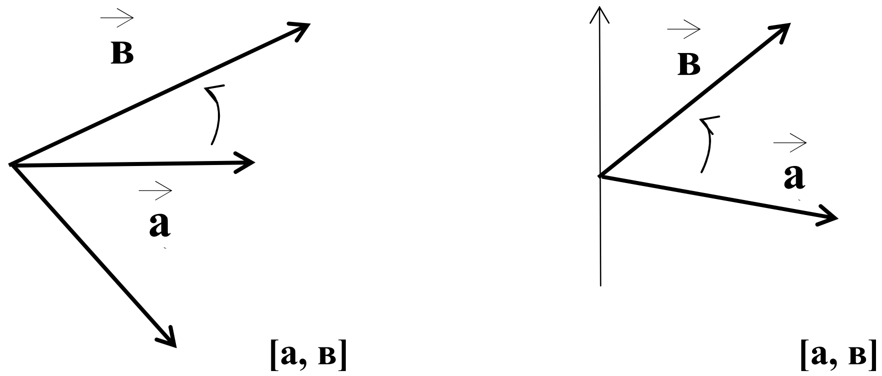


Рис. 41.

В случае коллинеарных векторов **а** и **в** их векторное произведение по определению есть нуль-вектор **о**.

Операция векторного умножения обладает свойствами:

1) **[а, в] = -[в, а],**

2) **[λа, в] = [а, λв] = λ[а, в], λ∈R,**

3) **[а + в, с] = [а, с] + [в, с]** и **[а + в, с] = [а, в] + [а, с],**

если в ортонормированном базисе **{i, j, k}** векторы **а** и **в** заданы координатами

$$\mathbf{а} = (а_1, а_2, а_3),\ \mathbf{в} = (в_1, в_2, в_3),\ \text{то}\ [\mathbf{а}, \mathbf{в}] = \left(\begin{vmatrix} а_2 а_3 \\ в_2 в_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} а_3 а_1 \\ в_3 в_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} а_1 а_2 \\ в_1 в_2 \end{vmatrix} \right)$$

Из определения векторного произведения векторов следует, что длина (модуль) векторного произведения векторов **а** и **в** численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах **а** и **в** как на сторонах (рис. 42).

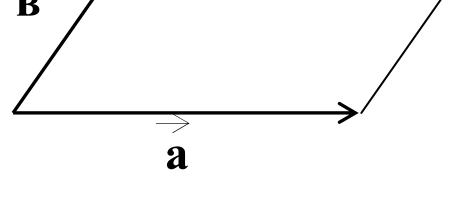


Рис. 42.

S = $|$**[a, в]**$|$. Отсюда следует формула для вычисления площади треугольника, построенного на векторах **а** и **в** (рис. 43): S =1/2 $|$ **[а, в]**$|$.

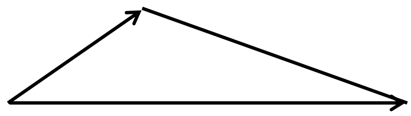


Рис. 43.

2. Упражнения.

Пример 1. Найти координаты и длину вектора **а** $\times$ **в,** если а = (3; -1; -2), в = (1; 2; -1).

$$\mathbf{a}\times\mathbf{в} = \left(\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right) = (5, 1, 7),\ |\mathbf{a}\times\mathbf{в}| = \sqrt{25+1+49} = 5\sqrt{3}.$$

Пример 2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах **а = 3i – j + k, в = 2i.**

S▱= $|$ **[а, в]** $|$, **а** = (3; -1; 1), **в** = (5; 0; 0). Отсюда **[а, в]** = $\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix}\right)$ =

=(0; 5; 5). Следовательно, S = $5\sqrt{0+1+1} = 5\sqrt{2}.$

Пример 3. Дано: $|$**а**$|$ = 3, $|$**в**$|$ = 5, **(а, в)** = 60°. Найти $|$**а** $\times$ **в**$|$ **.**

Имеем $|$**а** $\times$ **в**$|$ **=** $|$**а**$|$ $*$ $|$**в**$|$ $*$ sin**(а, в)** = 3 $*$ 5 $*$ sin 60° = $15\sqrt{3}$ / 2.

Пример 4. При каком значении параметра α векторы **р =** α**а** + 5**в** и **g =** 3**а - в** окажутся коллинеарными, если **а** и **в** не коллинеарны?

Найдем значение параметра α из условия: **[р, g] = о.**

Имеем [α**а** + 5**в,** 3**а - в] =** [α**а,** 3**а]** + [α**а, - в]** + [5**в,** 3**а]** + [5**в, - в]** =

= α**[а, а] -** α**[а, в]** + 15**[в, а]** + 5**[в, в]** = α $*$ **о + (**15 + α) $*$ **[в, а] -** 5 $*$ **0 =**

= (15 + α) $*$ **[в, а].**

Так как **а** не $||$ **в**, то из условия **(**15 + α) $*$ **[в, а] = о** следует, что 15 + α = 0, α = -15.

<u>Пример 5.</u> Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках A (3; 0; 5), B (3;-2; 2), C (1; 2; 4).

Имеем $S\Delta=1/2|[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]|$. $\mathbf{AB} = (0; -2; -3)$, $\mathbf{AC} = (-2; 2; -1)$ (рис. 44).

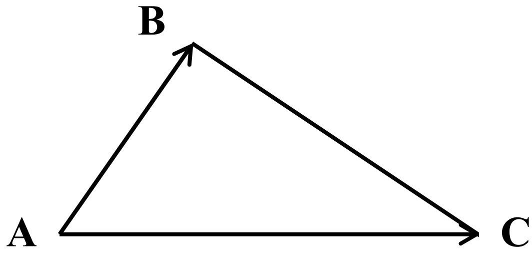


Рис. 44.

Тогда $[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (8; 6; 4)$.

Поэтому $S\Delta = 1/2 * 2\sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$.

3. Упражнения для самостоятельной работы

1. Определить координаты вектора $[\mathbf{a}, [\mathbf{в}, \mathbf{c}]]$, если $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{в} = 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{p} = 6\mathbf{a} - 3\mathbf{в}$ и $\mathbf{g} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{в}$, если $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{в}| = 5$, $(\mathbf{a}, \mathbf{в}) = 30°$.

3. Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках A (6; 5; -1), B (12; 1; 0), C (1; 4; -5).

4. Показать, что если $\mathbf{a} \perp \mathbf{в}$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, то $[\mathbf{a}, [\mathbf{в}, \mathbf{c}]] = \mathbf{o}$.

5. Показать, что для ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ выполняются равенства; $[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}$, $[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}$, $[\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{j}] = -\mathbf{i}$, $[\mathbf{i}, \mathbf{k}] = -\mathbf{j}$.

6. Векторы **а** и **в** образуют угол $\varphi = \pi/6$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{в}| = 5$, вычислить $|[\mathbf{a}, \mathbf{в}]|$.

7. Векторы **а** и **в** взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{в}| = 4$, вычислить $|[3\mathbf{a} - \mathbf{в}, \mathbf{a} - 2\mathbf{в}]|$.

8. Даны точки A (2; -1; 2), B (1; 2; -1), C (3; 2; 1). Найти $[\mathbf{BC} - 2\mathbf{CA}, \mathbf{CB}]$.

4. Примеры решения типовых задач

<u>Пример 1.</u> В ΔABC A(2; 1; 0), B(-3; -6; 4), C(-2; 4; 1). Найти высоту $h_в$ (рис. 45).

<u>Решение:</u> $S\Delta_{ABC} = 1/2\,|[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]|$, $S\Delta_{ABC} = 1/2\, h_в * |\mathbf{AC}|$.

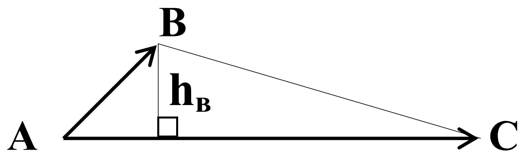


Рис. 45.

Следовательно, $\mathbf{h_в} = |[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]| \,/\, |\mathbf{AC}|$. Имеем **AB=** (-5; -7; 4),

AC= (-4; 3; 1).

$$[\mathbf{AB},\ \mathbf{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-19;\ -11;\ -43),\ |\mathbf{AC}| = \sqrt{16+9+1} =$$

$= \sqrt{26}$.

Отсюда $h_в = \sqrt{361+121+1849} \,/\, \sqrt{26} = \sqrt{2331}/\sqrt{26}$.

<u>Пример 2.</u> Найти координаты вектора **c,** если известно, что $|\mathbf{c}| = 1$ и вектор **c** перпендикулярен векторам **a**=(0; -4; 0; -1) и **в**=(1; 0; 2).

<u>Решение.</u>

По условию **c⊥a, c⊥в,** следовательно, **c** $\|$ **[a,в].** Тогда **c = α∗ [a,в], α∈R.**

Найдем координаты **[a, в]**: $[\mathbf{a}, \mathbf{в}] = \left(\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$ =(-8; -1; 4). Обозначая координаты **c=** $(c_1,\ c_2,\ c_3)$, имеем $c_1 = -8\alpha$, $c_2 = -\alpha$, $c_3 = 4\alpha$. По условию $|\mathbf{c}| = 1$, поэтому $\alpha * \sqrt{64+1+16} = 1$, откуда $\alpha = \pm 1/9$. Итак, **c** =(±8/9, ±1/9, ±4/9).

<u>Пример 3.</u> Дано: $|\mathbf{a}| = 10$, $|\mathbf{в}| = 2$, $\mathbf{a} * \mathbf{в} = 12$. Вычислить $|[\mathbf{a}, \mathbf{в}]|$.

<u>Решение.</u> Имеем $|[\mathbf{a}, \mathbf{в}]| = |\mathbf{a}| * |\mathbf{в}| * \sin(\mathbf{a}, \mathbf{в})$, $\mathbf{a} * \mathbf{в} = |\mathbf{a}| * |\mathbf{в}| * \cos(\mathbf{a}, \mathbf{в})$.

Так как по условию $\mathbf{a} * \mathbf{в} = 12$, $|\mathbf{a}| = 10$, $|\mathbf{в}| = 2$, то $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{в}) = \mathbf{a} * \mathbf{в} \,/\, |\mathbf{a}| * |\mathbf{в}| =$

12/10∗2=0,6.

Следовательно, sin(**а**, **в**)= $\sqrt{1-(0{,}6)^2}$ = $\sqrt{1-0{,}36}$ = $\sqrt{0{,}64}$ = 0,8. (sin(**а**, **в**)>0 по определению векторного произведения векторов). Отсюда $|[\mathbf{а},\mathbf{в}]|$=10∗2∗0,8=16.

5. Задачи для самостоятельной работы

1. Разложить вектор **р= [**3**а**+**в**-2**с**, **а**-**в**+5**с]** по взаимно перпендикулярным ортам **а, в, с,** образующим правую тройку.

2. Проверить, что **[а, в]=[в, с]= [с, а]**, если **а, в, с** удовлетворяют условию **а+в+с=0.**

3. Найти расстояние от точки С(3; 2; 2) до прямой, проходящей через А(1; 2; -3) и В(5; 2; 0).

4. Вычислить проекцию вектора **а**=3**р**-12**g**+4**r** на ось, имеющую направление вектора **в** = **[р**-2**r**, **р**+3**g**-4**r]**, если **р**, **g**, **r** взаимно перпендикулярные орты.

5. Дан тетраэдр АВСД : А(2; -1; -1), В(5; -1; 2), С(3; 0; -3), Д(6; 0; -1). Найти отношение площадей граней ВСД и АВС и высоту $h_в$ грани АВС.

6. Доказать, что площадь треугольника, построенного на векторах **а, в,** можно вычислить по формуле: SΔ=1/2 $\sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{а}*\mathbf{а} & \mathbf{а}*\mathbf{в} \\ \mathbf{в}*\mathbf{а} & \mathbf{в}*\mathbf{в} \end{vmatrix}}$.

7. Показать, что $[\mathbf{а}, \mathbf{в}]^2 = |\mathbf{а}|^2 * |\mathbf{в}|^2 - (\mathbf{а}, \mathbf{в})^2$.

8. Дана четырехугольная пирамида $S_{O\,ABC}$, ребра OA, OB, OS которой взаимно перпендикулярны и имеют длины OA=a, OB=в, OS=h. Основанием пирамиды служит прямоугольник OACB, на стороне AC которого взята точка К так, что АК=с. Найти угол φ (можно вычислить как угол между векторами **р** и **g,** где **р = [ВС, SВ], g = [OS, OR]).**

9. При каких значениях х и у вектор **с=(**х, у, 24**)** коллинеарен вектору **а**∗**в,** где **а = i -** 2**j** + 3**k**, **в** =-4**i** + 5**k**?

10. Даны **а** и **в** такие, что **а≠о**, **а**∗**в**=0. Выразить через **а** и **в** вектор **х,** удовлетворяющий уравнению **[х, а]= в.**

Тема 5. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Краткие теоретические сведения

Смешанным произведением трех векторов **а, в и с,** взятых в указанном порядке, называется число, равное скалярному произведению вектора **а** на вектор векторного произведения векторов **в** и **с**.

Обозначают **(а, в, с) = (а, [в, с]) = (а, в × с).**

Операция смешанного умножения векторов обладает свойствами:

1. α**(а, в, с) == (**α**а, в, с) = (а,** α**в, с) = (а, в,** α**с),** $\alpha \in$ **R.**

2. **(а + в, с, d) = (а, с, d) + (в, с, d).**

(а,в+с,d)=(а, в, d)+(а, с, d)

(а, в, с + d) = (а, в, с) + (а, в, d).

3. Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке сомножителей: **(а, в, с) = (с, а, в) = (в, с, а).**

4. При перестановке двух рядом стоящих сомножителей, смешанное произведение меняет знак: **(а, в, с) = -(в, а, с); (а, в, с) = -(а, с, в).**

Имеет место утверждение:

векторы **а, в, с** компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Если векторы **а, в** и **с** заданы своими координатами в ортонормированном базисе **{i, j, k}: а**=(a_1, a_2, a_3), **в**=($в_1$, $в_2$, $в_3$), **с**=(c_1, c_2, c_3), тогда

$$[\mathbf{в}, \mathbf{c}] = \left(\begin{vmatrix} в_2 в_3 \\ c_2 c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} в_3 в_1 \\ c_3 c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} в_1 в_2 \\ c_1 c_2 \end{vmatrix} \right),$$

$$(\mathbf{а}, \mathbf{в}, \mathbf{c}) = (\mathbf{а}, [\mathbf{в}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{а} * [\mathbf{в}, \mathbf{c}]) = a_1 * \begin{vmatrix} в_2 в_3 \\ c_2 c_3 \end{vmatrix} + a_2 * \begin{vmatrix} в_3 в_1 \\ c_3 c_1 \end{vmatrix} + a_3 * \begin{vmatrix} в_1 в_2 \\ c_1 c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ в_1 в_2 в_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

Итак, $(\mathbf{а}, \mathbf{в}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ в_1 в_2 в_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}$

Следствия.

1. Условие компланарности векторов **а, в, с** в координатах: $\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ в_1 в_2 в_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}$ =0.

2. Смешанное произведение трех векторов **а, в, с** больше нуля, если упорядоченная тройка является правой. Смешанное произведение упорядоченной тройки **а, в, с** меньше нуля, если тройка левая.

Геометрический смысл смешанного произведения заключается в следующем. Векторы **а, в, с** образуют правую тройку. Построим параллелепипед на векторах **а, в, с** как на сторонах. Их смешанное произведение равно объему этого параллелепипеда **$V_П$= (а, в, с)** (рис. 46).

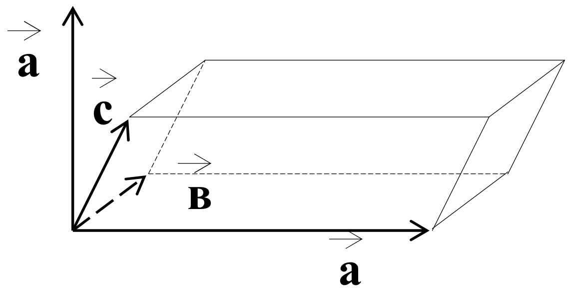


Рис. 46.

Векторы **а, в, с** образуют левую тройку. Тогда $V_{параллел.}$= -**(а, в, с).**

Итак, для любой тройки векторов **а**, **в, с**: $V_{пар.}$= $|(а, в, с)|$.

2. Упражнения

Пример 1. Даны три вектора: **а**=(1;-1; 3), **в**=(-2; 2; 1), **с**=(3; -2; 5).

Вычислить **(а, в, с).**

(а, в, с) = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ = 10+12-3-18+2-10= -7

Пример 2. Векторы **а**, **в**, **с**, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны, т.е. **а**$\perp$**в**, **а**$\perp$**с**, **в**$\perp$**с**. Зная, что $|$**а**$|$=4, $|$**в**$|$=2, $|$**с**$|$=3, вычислить **(а, в, с).**

По определению смешанного произведения; **(а, в, с)= а**$*$**[в, с]=**

$=|\mathbf{a}| * |[\mathbf{в}, \mathbf{c}]| * \cos(\mathbf{a}, [\mathbf{в}, \mathbf{c}]) = |\mathbf{a}| * |\mathbf{в}| * |\mathbf{c}| * \sin(\mathbf{в}, \mathbf{c}) * \cos(\mathbf{a}, [\mathbf{в}, \mathbf{c}]) = |\mathbf{a}| * |\mathbf{в}| * |\mathbf{c}| * \sin 90° * \cos 0° = 4*2*3*1*1=24.$

Пример 3. Установить, компланарны ли векторы **а, в, с,** если

а =(2; 3; -1), **в**=(1; -1; 3), **с**=(1; 9; -11).

Используем достаточное условие компланарности векторов:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & 11 \end{vmatrix}$ = 22-9+9-1-54+33=0. Векторы **а, в, с** – компланарны.

Пример 4. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах **а** = 3**i** + 4**j**, **в** = -3**i** + **k**, **с** = 2**j** + 5**k**. Правой или левой будет тройка **(а, в, с)**?

$V_{пар.}$=**(а, в, с)** = $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ = -45+0+0-0-6-0= -51<0, тогда тройка

а, в, с – левая.

Пример 5. Доказать тождество **(а+в, в+с, с+а) =** 2 **(а, в, с)**,

используя свойства смешанного произведения и следствия:

(а+в, в+с, с+а) = (а, в+с, с+а) + (в, в+с, с+а) =

= (а, в, с +а) + (а, с, с+а) + (в, в, с+а) + (в, с, с+а) =

= (а, в, с) + (а, в, а) + (а, с, с) + (а, с, а) + (в, с, с) + (в, с, а) =

(а, в, с) + (в, с, а) = (а, в, с) + (а, в, с) = 2 **(а, в, с).**

3. Упражнения для самостоятельной работы

1. **с⊥а, с⊥в, (а, в)**=30°. Зная, что $|\mathbf{a}|$ =6, $|\mathbf{в}|$ =3, $|\mathbf{c}|$ =3, вычислить **(а, в, с)**.

2. Установить, компланарны ли векторы **а** =(2; 1; 2), **в =**(2; 1; 2), **с**=(3; -1; -2).

3. Проверить, компланарны ли векторы **p, q, r,** если **а, в** и **с –** взаимно перпендикулярные орты: **p=а**-2**в+с, q=**3**а**+**в-**2**с, r=**7**а**+14**в-**13**с**.

4. Вычислить **(i+j+k, j,k).**

5. Дать геометрическое истолкование равенства: **(а, в, с)= -**3.

6. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах: **а=р-**3**q+r, в =**2**p+q-**3**r** и **с=р+**2**q+r**, где **p, q, r –** взаимно перпендикулярные орты.

4. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках А(2; -1; 1), В(5; 5; 4), С(3; 2; -1), Д(4; 1; 3**)** (рис. 47).

Решение. Объем тетраэдра равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах **АВ, АС, АД** как на сторонах. Найдем координаты **АВ, АС, АД**.

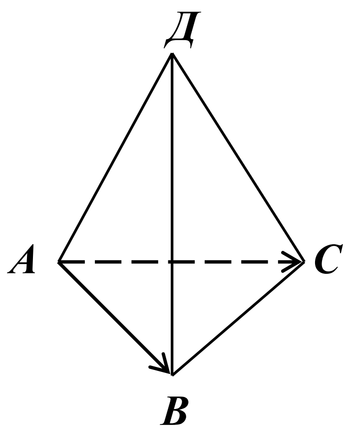


Рис. 47.

АВ=(3; 6; 3), **АС**=(1; 3; -2), **АД** =(2; 2; 2).

$$V_T=1/6\ (\mathbf{AB},\ \mathbf{AC},\ \mathbf{AД}) =1/6\left|\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right|=1/6\ |18+6-24-18-12+12| =3.$$

Пример 2. Дан тетраэдр с вершинами А(2; 3; 1), В(4; 1; -2), С(6; 3; 7), Д(-5; -4; 8) (рис. 48). Вычислить длину высоты, опущенной из вершины Д.

Решение. С одной стороны, $V_{тетр}=1/3\ S*h$, где S – площадь основания; h – высота.

$S\Delta_{ABC} =1/2\ \left|[AB,\ AC]\right|$, h =ДН.

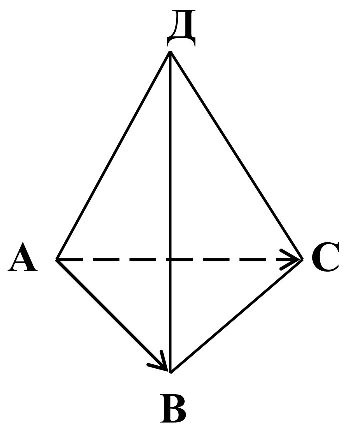


Рис. 48.

С другой стороны, $V_{тетр} = 1/6\ |(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AД})| = 1/3*1/2*|(\mathbf{AB}, [\mathbf{AC}, \mathbf{AД}])|$.
Тогда $1/6\ (\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AД}) = 1/3*1/2\ [\mathbf{AB}, \mathbf{AC}] * h_Д$; $h_Д = (\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AД}) / [\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]$.

Найдем координаты векторов **AB, AC, AД** и [**AB**, **AC**].

AB=(2,-2,-3), **AC**=(4,0,6), **AД**=(-7,-7,7), $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, [**AB**, **AC**]=(-12; -24; 8)

$$|(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AД})| = \left|\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix}\right| = |0+84+84-0+84+56| = 308.$$

$$|[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 576 + 64} = 28;\ h_Д = 308/28 = 39.$$

<u>Пример 3.</u> Доказать, что векторы **а, в** и **с,** удовлетворяющие условию **[а, в]+ [в, с]+ [с, а]=о**, компланарны.

<u>Решение.</u>

Векторы **а, в** и **с** компланарны $\Leftrightarrow$ **(а, в, с)**=0. Умножим обе части равенства скалярно, допустим, на вектор **а**:

а $*$ **([а, в]+[в, с]+[с, а])=а** $*$ 0 **(а, а, в)+(а, в, с)+(а, с, а) = о**.

Так как **(а, а, в)** = 0, **(а, с, а)**=0 по следствию, тогда **(а, в, с)** = 0 $\Leftrightarrow$ **а, в** и **с –** компланарны.

5. Задачи для самостоятельной работы

1. Проверить, компланарны ли данные векторы: **p=[а, m], q=[в, m],**

r=[c, m], где **a, в** и **c** взаимно перпендикулярные орты.

2. Объем тетраэдра V=5, три его вершины находятся в точках А (2; 1; -1), В (3; 0; 1), С (2; -1; 3). Найти координаты четвертой вершины Д, если известно, что она лежит на оси Оу.

3. Доказать, что если **i, j, k** – взаимно перпендикулярные векторы, то для любых векторов **а** и **в** справедливо соотношение:

[а, в]=(а, в, i) ∗i+[а, в, j) ∗j+(а, в, k) ∗k.

4. Найти вектор **x**, удовлетворяющий условию **(а, в, x)=**α, где **а** и **в** – данные векторы, α – данное число. Всегда ли уравнение имеет решение?

5. Доказать, что точки А (3; -1; 2), В (-l; 0; 2), С (0; 3; 1) лежат в плоскости, проходящей через точку Д (2; -3/4; 2).

6. Векторы **u, v, w** образуют правую тройку. Вектор **w**$\perp$**u, w**$\perp$**v, (u, v)=**45°. Найти смешанное произведение векторов **(w, v, u),** если |**u**|=3, |**v**|=8, |**w**|= $\sqrt{2}$.

7. Известно, что **p, q, r** – взаимно перпендикулярные орты. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах **a**=3**p**+2**q**-5**r, в=p-q**+4**r** и **c=p**-3**q+r,** если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах **а** и **в.**

8. Дан параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Найти, какую часть объема данного параллелепипеда составляет объем тетраэдра $АВ_1Д_1С$.

9. Векторы **а, в** и **с** – некомпланарны. При каких значениях λ компланарны векторы **а**+2**в**+λ**с,** 4**а**+5**в** +6**с,** 7**а**+8**в**+λ^2**с** ?

10. Вычислить объем параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1O_1$, в котором даны три вершины нижнего основания О (0; 0; 0), А (2; -3; 0), С (3; 2; 0) и вершина верхнего основания B_1 (3; 0; 4), лежащая на боковом ребре BB_1 противоположном ребру OO_1.

11. Доказать тождество (**а**, **в**, **с**)^2= $\begin{vmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{ав} & \mathbf{ac} \\ \mathbf{ва} & \mathbf{в}^2 & \mathbf{вс} \\ \mathbf{ca} & \mathbf{cв} & \mathbf{c}^2 \end{vmatrix}$.

12. Объем правильной треугольной пирамиды с длиной ребра a равен $1/6a^3$. Найти величину плоского угла при вершине пирамиды.

Тема 6. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Краткие теоретические сведения

Векторная запись многих уравнений физики более полно отражает соответствующие процессы и является более простой и компактной.

Если в результате движения вдоль какой-то кривой материальная точка переместилась за время Δt из положения, определяемого радиус-вектором $\mathbf{r_0}$ в положение, определяемое радиусом-вектором **r,** то вектор $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}-\mathbf{r_0}$, называется перемещением материальной точки, а длина части кривой между конечной и исходной точками – путем ΔS.

Тогда средняя скорость перемещения $\mathbf{v_{cp}}=\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, а средняя скорость прохождения пути $v_{cp}=\Delta S/\Delta t$.

Закон сохранения количества движения в векторной форме $m_1\mathbf{v}_1+ m_2\mathbf{v}_2+\ldots+ m_n\mathbf{v}_n=\mathrm{const}$.

Положение центра масс системы определяется равенством $\mathbf{r}_c=(\mathbf{r}_1m_1+\ldots+\mathbf{r}_nm_n)/(m_1+m_2)$, где $\mathbf{r}_1\ldots\mathbf{r}_n$ – радиус-вектора отдельных малых тел системы, в произвольной системе отсчета; $m_1\ldots m_n$ – массы этих тел; $\mathbf{r}_c$ – радиус-вектор центра масс системы.

Работа, произведенная силой **F** при перемещении **S** какого-либо предмета вычисляется как скалярное произведение $\mathbf{A}=(\mathbf{F}, \mathbf{S})= \mathbf{F} * \mathbf{S} * \cos(\mathbf{F}, \mathbf{S})$.

Кинетическую энергию $\mathbf{E_к}$ тела массой m, движущегося со скоростью **V**, можно найти по формуле $\mathbf{E_к}=1/2(m\mathbf{V}, \mathbf{V})$, то есть как половину скалярного произведения импульса и скорости тела.

Моментом приложенной к точке N силы **F** относительно точки O называется вектор $\mathbf{M} =[\mathbf{ON}, \mathbf{F}]$.

Линейная скорость **V** частицы твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, вычисляется по формуле **V = [ω, r],** где **r** – радиус-вектор частицы.

Силу, действующую на движущуюся частицу с зарядом g в магнитном поле, можно вычислить по формуле **Fл**=g**[V, B]**, где **V** – скорость частицы, **B** –вектор магнитной индукции.

2. Примеры решения типовых задач

Задача 1. Первую половину времени тело движется со скоростью $\mathbf{V}_1$=20 м/сек под углом α_1=60° к заданному направлению, а вторую половину времени – под углом α_2=120° к тому же направлению со скоростью $\mathbf{V}_2$=40 м/сек.

Найти среднюю скорость движения $\mathbf{V}_{ср}$ (рис. 49).

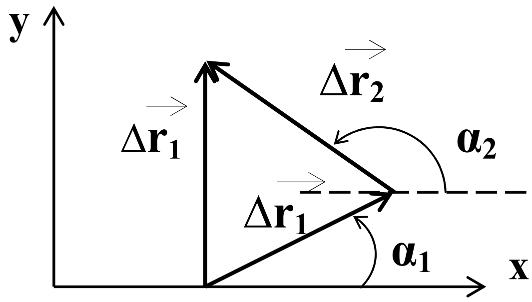


Рис. 49.

Решение. Так как тело совершило два перемещения, то суммарное перемещение определяется равенством $\mathbf{\Delta r}=\mathbf{\Delta r}_1+\mathbf{\Delta r}_2$, откуда

$\mathbf{V}_{ср}= (\mathbf{\Delta r}_1+\mathbf{\Delta r}_2)/2\mathbf{\Delta t}=1/2(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)$.

Сопоставляя по этому векторному равенству два скалярных, получим:

$\mathbf{V}_{ср\,x}=(\mathbf{V}_1\cos\alpha_1+ \mathbf{V}_2\cos\alpha_2)/2= -5$ м/сек,

$\mathbf{V}_{ср\,y}=(\mathbf{V}_1\cos\alpha_1+ \mathbf{V}_2\cos\alpha_2)/2= 15\sqrt{3}$ м/сек.

Задача 2. Частица массой m_1=2 кг, движущаяся со скоростью **V=**3**i**+2**j-k,** испытывает абсолютно неупругое столкновение с другой частицей, масса которой m_2=3 кг, а скорость $\mathbf{V}_2$**=-**2**i**+2**j**+4**k**. Требуется найти скорость получившейся составной частицы.

Решение. Запишем закон сохранения количества движения в векторной форме для данного случая: $m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2 = (m_1+m_2)\mathbf{V}$, где $\mathbf{V}$ – скорость движения составной частицы.

Отсюда $\mathbf{V} = \dfrac{m_1\vec{\mathbf{V}}_1 + m_2\vec{\mathbf{V}}_2}{m_1 + m_2} = 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Задача 3. Доказать, что центр масс однородной пластины треугольной формы находится на пересечении медиан,

то есть $\mathbf{r}_O = (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C) * m/3m = (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C)/3$ (рис. 50).

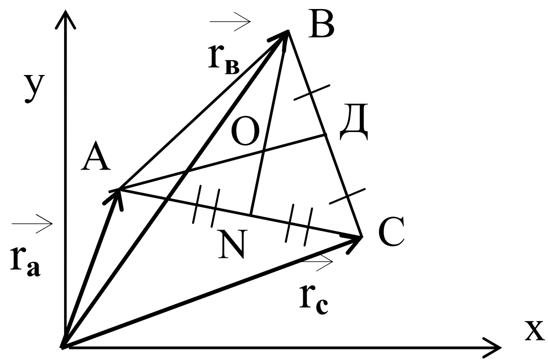


Рис. 50.

Найдем $\mathbf{r}_O$.

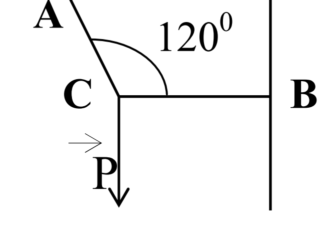
$\mathbf{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$; $\mathbf{BC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B$; $\mathbf{BД} = 1/2(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B)$; $\mathbf{AД} = \mathbf{AB} + \mathbf{BД} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A + 1/2(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B)$,

$\mathbf{AO} = 2/3 * (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A + 1/2(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B)) = 2/3\mathbf{r}_B - 2/3\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C/3 - \mathbf{r}_B/3 = (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_B)/3 - 2/3\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O =$

$= \mathbf{r}_A + \mathbf{AO} = \mathbf{r}_A + (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_B)/3 - 2/3\mathbf{r}_A = (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C)/3$.

Что и требовалось доказать.

Задача 4. К двум тросам подвешен груз весом 30Н. Определить силы, возникающие в тросах, если $\angle ACB = 120°$ (рис. 51).



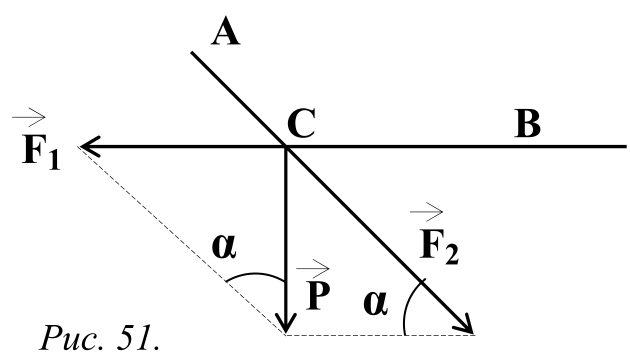


Рис. 51.

<u>Решение</u>. Задача сводится к определению величины составляющих векторов.

α=180°-$\angle$ACB=60°; |$\mathbf{F_1}$ |= |$\mathbf{P}$|∗tg α=10 $\sqrt{3}$ (Н); |$\mathbf{F_2}$|= |$\mathbf{P}$| /cosα=30∗2/ $\sqrt{3}$ (Н).

<u>Задача 5.</u> Найти работу силы **F** = {l; 2; 3} при перемещении на 5 м, если угол между вектором силы и перемещением 60°.

<u>Решение.</u> **F**= $\sqrt{1+4+9}$ = $\sqrt{14}$. **A**=14 ∗5 cos 60°=5 $\sqrt{14}$ ∗1/2 =5 $\sqrt{14}$ /2 (ед. работы).

<u>Задача 6.</u> Скорость тела массы m = 10 кг задана своими проекциями на координатные оси $\mathbf{V_x}$=5 м/с, $\mathbf{V_y}$=3 м/с, $\mathbf{V_z}$=4 м/с. Найти кинетическую энергию тела.

<u>Решение.</u>

Ек=1/2(mυ,υ)=m/2υ^2; υ={5, 3, 4}; |υ| = $\sqrt{25+9+26}$ =5 $\sqrt{2}$ м/с;

Ек=10/2∗ (5 $\sqrt{2}$)^2=250 Дж.

<u>Задача 7.</u> Определить момент силы **F = {l, 2, 3}**, приложенной к точке A(5; 2; 6), относительно точки B(4; 5; 2).

<u>Решение.</u>

BA={(5-4); (2-5); (6-2)} = {l, -3, 4}; **M** = [**BA**, **F**] = $\mathbf{i}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$-\mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i}+11\mathbf{j}+9\mathbf{k}$.

<u>Задача 8.</u> Определить заряд частицы, движущейся со скоростью υ = {2; 1; 2}**,** если со стороны магнитного поля с индукцией **B** = {1; 2; 3} на частицу действует сила |**F**|=10.

<u>Решение.</u> **F**=g [υ, **B**]; [υ, **B**]= $\mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}$;

F={-g, 4g, 3g};

|**F**| = $\sqrt{g^2+6g^2+9g^2}$ = 10; 16g^2 =100; g= ±50 $\sqrt{13}$ /13.

<u>Задача 9.</u> Тело вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью

$\boldsymbol{\omega}$ = {4; 5; 6}. Найти линейную скорость точки тела, радиус-вектор которой **r** = {1; 7; 3}.

Решение: $\upsilon = [\omega, \mathbf{r}] = \mathbf{i}\begin{vmatrix}5 & 6\\7 & 3\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}4 & 6\\1 & 3\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}4 & 5\\1 & 7\end{vmatrix} = 27\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 23\mathbf{k}$.

Задача 10. Два костяных шарика одинаковых масс налетают друг на друга со скоростями υ_1 и υ_2 под углом α и разлетаются после абсолютного упругого удара со скоростями $\mathbf{U_1}$ и $\mathbf{U_2}$. Найти угол разлета β (то есть угол между скоростями $\mathbf{U_1}$ и $\mathbf{U_2}$) (рис. 52).

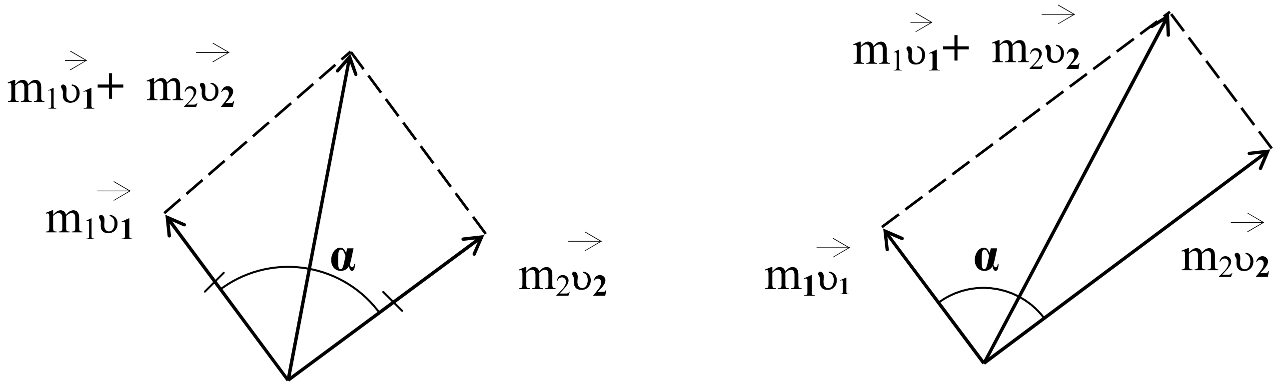


Рис. 52.

Решение. Очевидно, что по законам сохранения

$$\begin{cases} m\boldsymbol{\upsilon}_1 + m\boldsymbol{\upsilon}_2 = m\mathbf{U}_1 + m\mathbf{U}_2 \\ m\upsilon_1^2/2 + m\upsilon_2^2/2 = mU_1^2/2 + mU_2^3/2 \end{cases}$$

или после сокращения на m:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\upsilon}_1 + \boldsymbol{\upsilon}_2 = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 \\ \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = U_1^2 + U_2^2 \end{cases}$$

Но $m\,|\boldsymbol{\upsilon}_1 + \boldsymbol{\upsilon}_2|$ и $m\,|\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2|$ суть величины диагоналей векторных параллелограммов, причем $m\,|\boldsymbol{\upsilon}_1 + \boldsymbol{\upsilon}_2| = m\,|\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2|$, а тогда по теореме косинусов:

$m^2\,|\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\,\upsilon_1\upsilon_2\cos(180° - \alpha)| = m^2\,|U_1^2 + U_2^2 - 2\,U_1U_2\cos(180° - \beta)|$, или

$\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\,\upsilon_1\upsilon_2\cos(180° - \alpha) = U_1^2 + U_2^2 - 2\,U_1U_2\cos(180° - \beta)$.

Так как $\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = U_1^2 + U_2^2$, то $-2\,\upsilon_1\upsilon_2\cos(180° - \alpha) = -2\,U_1U_2\cos(180° - \beta)$, или $\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha = U_1U_2\cos\beta$, откуда $\cos\alpha = U_1U_2 \cos\beta / \upsilon_1\upsilon_2$.

Задача 11. Лодка передвигается относительно воды в реке со скоростью υ и под углом α к течению, скорость которого равна $\mathbf{U}$. Найти скорость лодки относительно берега (рис. 53).

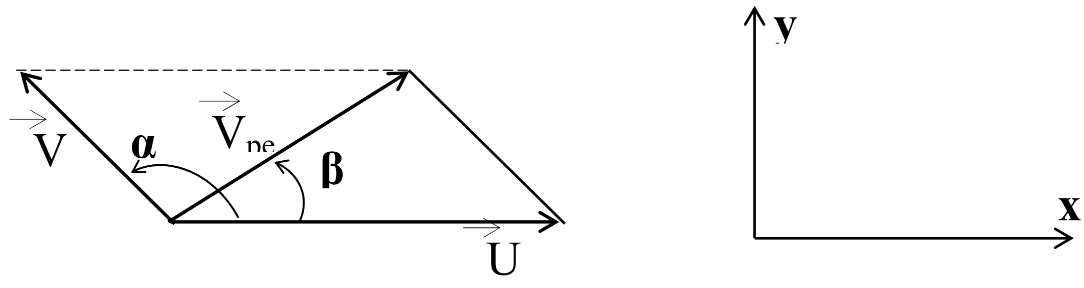


Рис. 53.

Решение. Очевидно, что искомая скорость $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{рез}} = \upsilon + \mathbf{U}$. Так как углы α и β являются одновременно и углами параллелограмма и углами, заданными по отношению к одному и тому же направлению, то решать полученное равенство можно любым из двух способов.

Пользуясь теоремами косинусов и синусов, получим

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\text{рез}} = \upsilon + \mathbf{U} = \sqrt{\upsilon^2 + U^2 - 2U\upsilon\cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{\upsilon^2 + U^2 - 2U\upsilon\cos\alpha};$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) / \boldsymbol{\upsilon}_{\text{рез}} = \sin\beta/\upsilon,$$

откуда $\sin\beta = \upsilon \sin\alpha / \sqrt{\upsilon^2 + U^2 - 2U\upsilon\cos\alpha}$.

В проекциях же на оси x и y получим из $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{рез}} = \upsilon + \mathbf{U}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{рез}} = \upsilon\cos\alpha + \mathbf{U}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{рез}} = \upsilon\sin\alpha$.

Покажем, что второе решение тождественно первому:

$$\upsilon_{\text{рез}} = \sqrt{\upsilon_{\text{резx}} + \upsilon_{\text{резy}}} = \sqrt{\upsilon^2\cos^2\alpha + U^2 + 2\upsilon U\cos\alpha + \upsilon^2\sin^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\upsilon^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + U^2 + 2\upsilon U\cos\alpha} = \sqrt{\upsilon^2 + U^2 + 2\upsilon U\cos\alpha},$$

$$\sin\beta = \upsilon_{\text{рез y}} / \upsilon_{\text{рез}} = \upsilon \sin\alpha / \sqrt{\upsilon^2 + U^2 - 2U\upsilon\cos\alpha}.$$

Таким образом, оба решения эквивалентны, как и должно быть.

Задача 12. При абсолютно упругом ударе двух шаров, налетавших под углом α друг к другу, скорость одного из шаров по величине не изменилась. Найти угол разлета β (массы шаров разные).

Решение. Очевидно $\begin{cases} m\boldsymbol{\upsilon_1} + m\boldsymbol{\upsilon_2} = m\mathbf{U_1} + m\mathbf{U_2} \\ m\upsilon_1^2/2 + m\upsilon_2^2 = mU_1^2/2 + mU_2^2/2 \end{cases}$

Из второго равенства в силу $\upsilon_1 = U_1$ вытекает, что $\upsilon_2 = U_2$. По теореме косинусов:

$m_1^2\upsilon_1^2 + m_2^2\upsilon_2^2$-$2m_1m_2\upsilon_1\upsilon_2\cos(180°$-$\alpha)$=$M\left(\frac{-2+10}{2}\right),\left(\frac{-2+7}{2}\right)$-$2m_1m_2U_1U_2 * \cos(180°$-$\beta)$

откуда вытекает $\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha = U_1U_2\cos\beta$ или $\cos\alpha = \cos\beta$ (в силу $\upsilon_1\upsilon_2 = U_1U_2$).

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

1 вариант

1. Пусть ABC – произвольный треугольник, а C_1 – середина отрезка AB. Доказать, что 4**CC^2 - AB^2 =** 4**CA ∗ CB.**

2. Пусть **a, b, c** – произвольные векторы, а α, β, γ – произвольные числа. Доказать, что векторы α∗**a** -β∗**b,** γ∗**b-**α∗**c,** β∗**c-**λ∗**a** компланарны.

3. Даны произвольные векторы **p, g, r, n.** Доказать, что векторы **a=[p, n], b=[g, n], c=[r, n]** компланарны.

4. Определить момент силы **F**, приложенной к точке A относительно точки B, если **F** = (2; -4; 3), A(1; 5; 0), B(0; 0; 0).

5. Пусть ABCD – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей, а E и F – соответственно середины параллельных сторон BC и AD. Построить на чертеже следующие векторы: **AB+DC, AO-AB, ED+FA+FO, AB+BE-OE+CD.**

6. Дан треугольник ABC, где **AB=b, AC=c,** BD – высота. Найти разложение вектора **BD** по базису **b, c**.

2 вариант

1. Дан треугольник ABC. Выразить вектор **h=AH** через векторы **AB=h, BC=c**, где H – основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

2. Доказать тождество **a**∗**b**∗ **(c+**λ∗**a+**μ∗**b)=a**∗**b**∗**c,** где λ и μ – какие угодно числа.

3. Векторы **a, b, c, d** связаны соотношениями **[a,b] = [c,d], [a,c]=[b,d].** Доказать коллинеарность векторов **a-d и b-c.**

4. Показать, что момент силы относительно точки не меняется, если точку приложения силы переместить по прямой, вдоль которой сила действует.

5. Пусть ABCD – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей, а точки M, N, P, Q – соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA. Построить на чертеже следующие векторы: **MO-OA, OQ-OB, AC-PD, AN-MQ.**

6. Принимая в качестве базиса векторы **AB=b** и **AC=c**, совпадающие со сторонами треугольника ABC, определить разложение векторов, приложенных в вершинах треугольника и совпадающих с его медианами.

3 вариант

1. Дан параллелограмм OABC. Пусть **OA=CB=a, OC=AB=b**. Дать геометрическое истолкование формул:

a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2*(\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2)$,

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 4*\mathbf{a}*\mathbf{b}$,

c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})*(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$.

2. Доказать, что **a, b, c** – компланарны, если $\lambda*\mathbf{a}+\beta*\mathbf{b}+\gamma*\mathbf{c}=\mathbf{0}$, где по крайней мере одно из чисел λ, β, γ не равно нулю.

3. Даны точки A(2; -1; 2), B(1; 2; -1) и C(3; 2; 1). Найти координаты векторных произведений: 1) [**AB**, **BC**]; 2)[(**BC**-2**CA**), **CB**].

4. Показать, что момент равнодействующей нескольких сил, приложенных к одной и той же точке, равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

5. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, O – точка пересечения диагоналей, а M, N, P, Q – середины сторон AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Доказать, что **MO = OP, QO = ON, MN = QP .**

6. Даны четыре вектора **a**=(2; 1; 0), **b**=(1; -1; 2), **c**=(2; 2; -1), **d**=(3; 7; -7). Определить разложение каждого из них, принимая в качестве базиса три остальные.

4 вариант

1. Дан тетраэдр OABC, у которого грань ABC является прямоугольным треугольником, $\angle C=90°$. Выразить вектор **OH** через векторы **a=OA, в=OB, c=OC,** где H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины O на плоскость грани ABC.

2. Доказать тождество **[[a,b], [c,d]]=c(a,b,d)-d(a,b,c).**

3. Вектор **x** перпендикулярен векторам **a**=(4; -2; -3) и **b**=(0; 1; 3), образует с осью Oy тупой угол. Зная, что | **x** |=26, найти его координаты.

4. Сила **F**=(2; 2; 9) приложена к точке A(4; 2; -3). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки C(2; 4; 0).

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O – точка пересечения диагоналей, а M, N, P, Q – середины сторон AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Найти векторы $\mathbf{AD}+\mathbf{CC_1}$, $\mathbf{AO}+\mathbf{MO}$, $\mathbf{AM}+\mathbf{D_1C_1}+\mathbf{NC}$, $\mathbf{OC_1}-\mathbf{B_1O}+\mathbf{BA}-\mathbf{AA_1}$.

6. На плоскости даны точки A(l; -2), B(2; l), C(3; 2), D(-2; 3). Определить разложение векторов **AD, BD, CD** и **AD+BD+CD**, принимая в качестве базиса векторы **AB** и **AC** .

5 вариант

1. Даны векторы **a=(**2; -1; 3), **b**=(1; -3; 2), **c**=(3; 2; -4). Определить координаты вектора **x**, удовлетворяющего условиям **x∗a=**10, **x∗b=**22, **x∗c** = –40.

2. **[a, b] ∗ [b, c] ∗ [c, a]=(a, b, c)^2**. Доказать тождество.

3. Вектор **m,** перпендикулярный оси Oz и вектору **a**=(8; -15; 3), образует острый угол с осью Oz. Зная, что |**m**| =51, найти его координаты.

4. Даны три силы **M**=(2; -1; -3), **N**=(3; 2; -1)**, P**=(-4; 1; 3), приложенные к точке C(-1;4;-2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки A(2;3,-1).

5. Дан параллелограмм ABCD и произвольная точка O пространства. Доказать, что **OA + OC = OB + OD.**

6. Векторы **AB**=(1; 3) и **AC**=(2; 1) совпадают со сторонами треугольника. Определить координаты векторов **AM$_1$, BM$_1$, CM$_1$,** совпадающих с его медианами.

6 вариант

1. **a**=($\frac{3}{2}$; 1; -$\frac{5}{2}$), **b**=(-3; -2; 5). Существует ли вектор **x**, удовлетворяющий условиям **a∗x=**2, **b∗x=**3?

2. Доказать тождество **[a, [b, [c,d]]]= (a, c, d) ∗b-(a, b) ∗ [c, d].**

3. Даны векторы **a** = (2; -3; 1), **b** = (-3; 1; 2), **c = (**1; 2; 3). Вычислить **[[a, b],c]** и **[a,[b, c]].**

4. Даны три силы **M**=(3; 4; -2), **N=(**2; 3; -5), **P**=(-3; -2; 4), приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M_1**(**5; 3; -7) в положение M_2(4; -1; -4).

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, E, F и G – середины соответственно сторон AA_1, AD_1 и CC_1. Найти векторы **AA1+AD+AB,**

$\frac{1}{2}$ **AA1-AD-AB,** $\frac{1}{2}$ **AA1+AD+**$\frac{1}{2}$ **AB.**

6. Пусть ABCD – параллелограмм, E и F – середины противоположных сторон BC и AD, O – точка пересечения диагоналей. Взяв векторы **AB=**$\mathbf{e_1}$**,** **AD=**$\mathbf{e_2}$ за базисные, определить координаты следующих векторов: **AC, OD, EO, BD; EA.**

7 вариант

1. Пользуясь скалярным произведением векторов, доказать, что высоты прямоугольника пересекаются в одной точке.

2. $[\mathbf{a},\mathbf{b}]^2 * [\mathbf{a}, \mathbf{c}]^2 - ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{a}, \mathbf{c}])^2 = \mathbf{a}^2(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$. Доказать тождество.

3. Найти расстояние от точки C(3; 2, -2) до прямой, проходящей через точки A(1; 2; -3) и B(5; 2; 0) с помощью векторного произведения.

4. Три силы $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей **R**, если известно $\mathbf{F_1}=1$, $\mathbf{F_2}=8$, $\mathbf{F_3}=5$.

5. В треугольнике ABC векторы **AK**, **BL**, **CM** направлены по медианам. Выразить их через векторы **a = AB** и **b = AC.**

6. Дан параллелограмм ABCD, E и F – середины противоположных сторон BC и AD, O – точка пересечения диагоналей. Взяв векторы $\mathbf{e_1}$**=AF,** $\mathbf{e_2}$**=OD** за базисные, определить координаты векторов **AC, FC, EO, BD, EA.**

8 вариант

1. Доказать, что если угол A треугольника ABC прямой, то $(\mathbf{OA}+\mathbf{OB}) * (\mathbf{OA}+\mathbf{OC}) = 0$, где O – центр описанной окружности.

2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) * [\mathbf{c}, \mathbf{d}]+(\mathbf{a}, \mathbf{c}) * [\mathbf{d}, \mathbf{b}]+(\mathbf{a}, \mathbf{d}) * [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} * (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$. Доказать тождество.

3. К каждой грани треугольной призмы восстановлен перпендикулярный вектор, направленный во внешнюю сторону призмы и имеющий модуль, равный площади соответствующей грани. Доказать, что сумма всех построенных векторов равна нуль-вектору.

4. Проекции перемещения движущейся точки на оси координат равны $S_x = 2$м, $S_y = 1$м, $S_z = -2$м. Проекции действующей силы на оси координат

равны F_x=5Н, F_y=4Н, F_z=3Н. Вычислить работу **A** силы **F** и угол между силой **F** и перемещением **S.**

5. В тетраэдре ABCD точка E лежит на ребре AB и делит отрезок AB так, что AE=3EB. Полагая **a=AE**, **b=AC**, **c=AD**, выразить через **a**, **b** и **c** векторы **BD**, **BC**, **CD**, **ED**, **EC**.

6. Даны три вектора **u = (**3; -2**)**, **v**=(-2; 1), **w=(**7; -4). Определить коэффициенты разложения каждого из них, принимая в качестве базиса два других.

9 вариант

1. Доказать, что если треугольник прямоугольный, то его углы связаны соотношением: cos2**A**+cos2**B**+cos2**C=-**l.

2. $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}],[\mathbf{b}, \mathbf{c}]] * [[\mathbf{b}, \mathbf{c}],[\mathbf{c}, \mathbf{a}]] * [\mathbf{c}, \mathbf{d}] * [\mathbf{d}, \mathbf{b}]]=(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^4$**.** Доказать тождество.

3. К каждой грани произвольного тетраэдра восстановлен перпендикулярный вектор, направленный во внешнюю сторону тетраэдра и имеющий модуль, равный площади соответствующей грани. Доказать, что сумма всех построенных векторов равна нуль-вектору.

4. Точки A_1, A_2, A_3, являются вершинами равностороннего треугольника, вписанного в окружность с центром C. Найти равнодействующую трех сил: $\mathbf{F_1}=\mathbf{CA_1}$, $\mathbf{F_2}=\mathbf{CA_2}$, $\mathbf{F_3}=\mathbf{CA_3}$.

5. В треугольнике ABC вектор **AB=m** и вектор **AC=n.** Построить каждый из следующих векторов:

1) $\dfrac{\mathbf{m}+\mathbf{n}}{2}$,

2) $\dfrac{\mathbf{m}-\mathbf{n}}{2}$,

3) $\dfrac{\mathbf{n}-\mathbf{m}}{2}$,

4) $\dfrac{\mathbf{m}+\mathbf{n}}{2}$.

6. В равнобочной трапеции ABCD угол A равен $\dfrac{\pi}{3}$. Полагая $\mathbf{AB}=\boldsymbol{l}_1$, $\mathbf{AD}=\boldsymbol{l}_2$, разложить векторы **BC, AC, BD** по базису $\{\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2\}$.

10 вариант

1. Показать, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра взаимно перпендикулярны.

2. Проверить, компланарны ли векторы: **p**=**a**-2**b**+**c**, **g**=3**a**+2**b**-2**c**, **e**=7**a**+14**b**-13**c**, где **a, b, c** – взаимно ортогональны.

3. Доказать тождество **[[a, b],c]=b(a, c)-a(b, c),** где **a, b, c** – произвольные векторы.

4. К материальной точке М, находящейся в произвольной точке пространства, приложены силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, направленные к вершинам треугольника A_1, A_2, A_3, причем $|\mathbf{F}_1|$, $|\mathbf{F}_2|$, $|\mathbf{F}_3|$ пропорциональны расстояниям MA_1, MA_2, MA_3. Доказать, что равнодействующая этих сил направлена к точке пересечения медиан треугольника.

5. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах **a** и **b**, доказать геометрически справедливость тождества $(\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2})+(\mathbf{b}+\frac{\mathbf{a}}{2})=\frac{3}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

6. В ромбе ABCD векторы $\mathbf{AC}=\mathbf{e}_1$, $\mathbf{BD}=\mathbf{e}_2$ взяты за базисные. Найти координаты векторов **AB, BC, DA** в этом базисе.

11 вариант

1. Доказать, что сумма квадратов медиан треугольника равна трем четвертям суммы квадратов его сторон.

2. Вычислить объем пирамиды OABC, если $|\mathbf{OA}|=a$, $|\mathbf{OB}|=b$, $|\mathbf{OC}|=c$, $\angle\mathbf{AOB}=\alpha$, $\angle\mathbf{BOC}=\beta$, $\angle\mathbf{AOC}=\gamma$, $\alpha=\beta=\gamma$.

3. Доказать тождество $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] * [\mathbf{c}, \mathbf{d}] = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) * (\mathbf{b}, \mathbf{d})-(\mathbf{a}, \mathbf{d}) * (\mathbf{b}, \mathbf{c})$, где **a, d, c, d** – произвольные векторы.

4. Сила **F**=**i**-8**j**-7**k** разложена по трем взаимно перпендикулярным направлениям, одно из которых задано вектором **F**=2**i**+2**j**+**k**. Найти составляющую силы **F** в направлении вектора **a**.

5. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах **a** и **b**, доказать геометрическую справедливость тождества: $(\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2})-(\mathbf{b}+\frac{\mathbf{a}}{2})=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$.

6. Найти координаты вектора **a** = (4; 1; -15) в базисе $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, если $\mathbf{e}_1=2\mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2=-\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3=3\mathbf{k}$.

12 вариант

1. Дан куб с длиной ребра, равной 1. Найти угол между выходящими из его вершины двумя диагоналями двух граней.

2. При каких значениях α векторы $\mathbf{a}+\alpha*\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\alpha*\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\alpha*\mathbf{a}$ компланарны?

3. Доказать тождество **[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0,** где

a, b, c, d – произвольные векторы.

4. Источник света помещен в менее плотную среду. Луч света, сонаправленный с единичным вектором **P**, попадает на границу раздела сред, единичный вектор нормали к которой **n**. Он отражается по лучу, сонаправленному с единичным вектором **g** (рис. 54). Найти:

а) разложение вектора **b** по векторам **p** и **n**;

б) длину вектора **b**;

в) единичный вектор **k**, сонаправленный с вектором **b**;

г) скалярное произведение **(g, k), (g, k)** по данным φ, θ, **p**,

д) скалярное произведение **(g, k), (g, k)** по данным **p, n**;

е) разложение вектора **a** по векторам **k, n**.

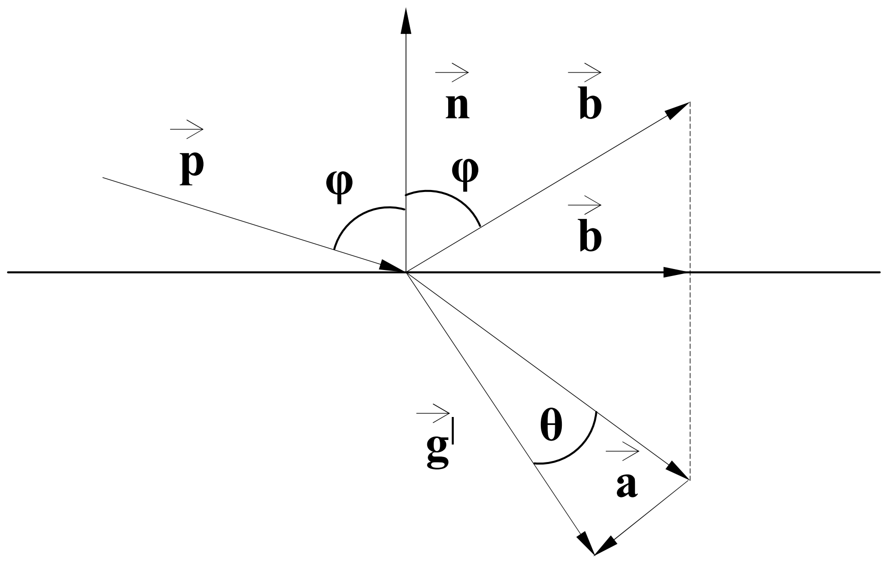


Рис. 54.

5. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах **a** и **b**, доказать геометрически справедливость тождества:

а) $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

б) $\frac{1}{2}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{b}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

6. Дано разложение вектора **c** по базису **{i, j, k}**, **c**=16**i**+15**j**+12**k**. Определить разложение по этому же базису вектора **d**, параллельного вектору **c** и противоположного с ним направления, при условии, что $|\mathbf{d}|$ =75.

13 вариант

1. Дан куб с длиной ребра, равной 1. Найти угол между выходящими из его вершины главной диагональю и диагональю грани.

2. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах: **a=i+j-**3**k, d= -i+j+3k, c=**2**i-j+k.**

3. Найти вектор **x**, если **(x, a) =** α**, [x, a]= b** при **b** $\neq$**0**.

4. Доказать, что при переходе оптического излучения из менее плотной среды в более плотную справедливо соотношение $\mathbf{g}=\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{g}-\mathbf{n}(\mathbf{g},\mathbf{n})(1-\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2-1}{(\mathbf{g},\mathbf{n})^2}}))$, где $\varepsilon=\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}$ – коэффициент преломления.

5. Точка О является центром тяжести треугольника АВС. Доказать, что **АВ+ОВ+ОС=о.**

6. Векторы **m, n, p** образуют базис. Показать, что векторы **a=m**+2**n**+5**p, b=-m**+6**n**+3**p, c**=2**p** также образуют базис, и найти координаты вектора **d=m**+4**p** в этом базисе.

14 вариант

1. Найти проекцию вектора **a**=(2; -3; -5) на ось, составляющую с координатными осями O_x, O_z углы α=45°, γ=60°, а с осью O_y – острый угол β.

2. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на трех векторах **a**=3**p**+2**g**-5**r**, **b=p-g**+4**r**, **c=p**-3**g**+**r**, если за основание взят параллелограмм, построенный на **a, b**. Кроме того, известно, что **p, g, r** – взаимно перпендикулярные орты.

3. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах **a**=2**i**-3**j+k, b=i**+7**g**+4**k.**

4. Записать в векторной форме закон преломления при переходе из более

плотной среды в менее плотную.

5. В правильном пятиугольнике ABCDE заданы векторы, совпадающие с его сторонами: **AB=m, BC=n, CD=p, DE= g, EA=r.** Построить векторы:

1) **m-n+p–g+r**,

2) **m**+2**p**+$\frac{1}{2}$**r**,

3) 2**m**+$\frac{1}{2}$**n**–3**p**–**g**+2**r**.

6. Векторы **l, m, n** разложены по трем некомпланарным векторам **a, b, c**: **l** =2**a-b-c; m** = 2**b - c - a; n** = 2**c - a - b** . Определить, являются ли векторы **l, m, n** базисом пространства.

15 вариант

1. Даны две точки A(3; -4; -2), B(2; 5; -2). Найти проекцию вектора **AB** на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oy углы α=60°, β=120°, а с осью Oz – тупой угол γ.

2. Длины базисных векторов $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ в пространстве равны соответственно 1, 2, 2, а углы между ними равны $(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2})$=120°, $(\mathbf{e_1},\mathbf{e_3})$=45°, $(\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})$=135°. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты (-1; 0; 2), (1; 1; 3), (2; -1; -1).

3. Параллелограмм ABCD построен на векторах **AB=(**7;1;-3), **AD**=(0;1;0). Вычислить высоту CH параллелограмма и синус угла A.

4. Однородная проволока согнута в виде прямоугольного треугольника ABC, катеты которого AC и BC равны соответственно 6 и 8 см. Найти координаты центра масс этого треугольника, приняв C за начало прямоугольной декартовой системы координат, а катеты – за оси.

5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: **AB=m, AD=n,** $\mathbf{AA_1}$**=p.** Построить каждый из следующих векторов:

1) **m**+**n**+**p**,

2) $\frac{1}{2}$**m**+2**n**+**p**,

3) **m**+**n–p**,

4) $-\mathbf{m} - \mathbf{n} + \frac{1}{2}\mathbf{p}$.

6. Даны три вектора **m**=(-1; 1; -2), **n=(**2; 1; -3), **k**=(3; -2; 1). Найти разложение вектора **a**=(-6; 5; 11) по базису **{m, n, k}.**

16 вариант

1. Найти вектор **x**, зная, что он перпендикулярен векторам **a**=(2; 3; -1), **b=(**1; -2; 3**)** и удовлетворяет условию **x(**2**i - j + k) =** -6.

2. Даны единичные векторы **m, n, p**. Угол между **(p, [m, n]) = (m, n) =** α. Доказать, что **([m, n]**, **p) =** $\frac{1}{2}\sin\alpha$.

3. Даны векторы **AB**=(3; 21; 2), **AC=(**5; 1; 0). Определить площадь треугольника ABC и координаты какого-либо вектора, компланарного векторам **AB**, **AC** и перпендикулярного вектору **m=AB-AC**.

4. Определить координаты центра масс однородной четырехугольной доски, вершины которой находятся в точках O(0; 0), B(-4; 1) и C(-2; 5).

5. В правильной прямой прямоугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы векторы, совпадающие с ее ребрами **AB=n, AE=g,** $\mathbf{AA_1}$**=r.** Построить следующие векторы:

1) $\mathbf{n} - \frac{1}{2}\mathbf{g} + \mathbf{r}$,

2) $\frac{1}{6}\mathbf{n} + \frac{3}{4}\mathbf{g} - \frac{1}{3}\mathbf{r}$.

6. Относительно базиса $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\}$ вектор **c**=(-2; -12). Найти координаты вектора **c** относительно базиса **{a,b}**, если **a**=4$\mathbf{e_1}$-2$\mathbf{e_2}$, **b** = 3$\mathbf{e_1}$+5$\mathbf{e_1}$.

17 вариант

1. Вычислить тупой угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

2. Вычислить объем параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$, в котором даны три вершины нижнего основания O(0; 0; 0), A(2; -3; 0) и C(3; 2; 0) и вершина верхнего основания B_1(3; 0; 4), лежащей на боковом ребре BB_1, противоположном ребру OO_1.

3. Вычислить площадь параллелограмма ABCD, если: **AB=**3**m-**2**n,**

AC=m+n, $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 12$, $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 30°$.

4. Однородная проволока согнута в виде треугольника, вершины которого находятся в точках O(0; 0), A(4; 0) и B(3; 4). Найти координаты центра масс этого треугольника.

5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра AA_1, точка K – центр грани BCC_1B_1. Выразить векторы **AK, AC** через векторы **AB=a, AD=b, AE=c.**

6. Относительно базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ вектор $\mathbf{p}=(-3; 6; -13)$. Найти координаты вектора **p** в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, если $\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3= -2\mathbf{e}_1 +3\mathbf{e}_2$.

18 вариант

1. Доказать, что вектор **p=b(a, c)-c(a,b)** перпендикулярен вектору **a**.
2. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах **OA, OB, OC,** если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов и длина каждого вектора равна 2.

3. Векторы **m, n, p** являются взаимно перпендикулярными ортами, образующими правую тройку. Разложить вектор **g=[3m+4n, m+6n+4p]** по векторам **m, n, p**.

4. Найти смещение центра масс однородного стержня AB, если точка A смещается вдоль оси O_y на δ_y, а точка B – вдоль оси O_x на δ_x.

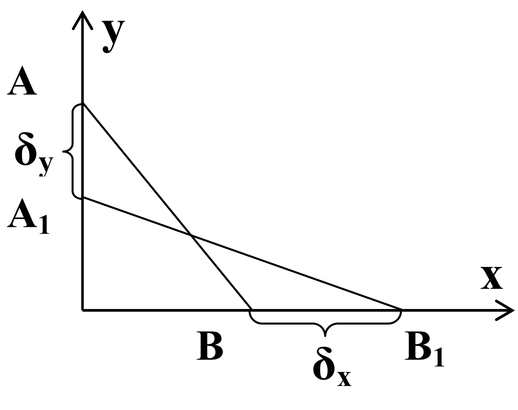


Рис. 55.

5. На векторах **OA, OB, OC** построен параллелепипед $OABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить следующие векторы **OA-OC-2OM, OB+OC+OM,** где M принадлежит DD_1, причем $DM:MD_1 = 3:2$.

6. Проверить, что векторы $\mathbf{e}_1=(1; -7)$, $\mathbf{e}_2=(2; 3)$ образуют базис, и найти

разложение вектора **a**=(-4; -1; 1) по этому базису.

19 вариант

1. Даны вершины треугольника A(3; 2; -3), B(5; 1; -1), C(1; -2; 1). Определить внешний угол при вершине A.

2. Доказать, что если **a**⊥**b**, то **[a,[a,[a,b]]]=a**^{4}∗**b.**

3. Векторы **a, b** составляют угол в 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах **a**-2**b,** 3**a**+2**b**, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 5$.

4. Тело вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью **u**. Найти эту скорость, если линейная скорость точки тела с радиус-вектором **r={**1, -3, 4**}** задана вектором **v**={-3, 11, 9}.

5. В тетраэдре ABCD даны ребра, выходящие из вершины A: **AB=b, AC=c, AD=d**. Выразить через эти векторы остальные ребра тетраэдра, медиану DM грани BCD и вектор **AQ**, где Q – центр тяжести грани BCD.

6. К окружности с центром O и радиусом R из точки C проведены касательные CA и CB (A и B – точки касания). Найти координаты вектора **OC** в базисе **{OA,OB}.**

20 вариант

1. Какой угол составляют между собой ненулевые векторы **a** и **b**, если известно, что вектор **a**+3**b** перпендикулярен вектору 7**a**-5**b**, вектор **a**-4**b** перпендикулярен вектору 7**a**-2**b**?

2. В треугольнике ABC проведена высота AD. Полагая **AC=b, CB=a, AD=h,** найдите разложение вектора **h** по векторам **a** и **b**.

3. Доказать что если векторы **[a,b] и [c,d]** коллинеарны, то **a, b, c, d** – компланарны.

4. Найти плотность тела, имеющего форму пирамиды с вершинами OABC, если $|AO|=5$, $|OB|=6$, $|OC|=4$, ∠AOB=30°, ∠BOC=60°, ∠AOC=45°, масса тела m=2 кг.

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, **AA_1=a, AB=b, AC =c.** Построить вектор $-\frac{1}{2}$**(c-b)+a.**

6. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ векторы **AB, AC, AA_1** примем за

базис. Определить координаты центра тяжести треугольника $A_1B_1C_1$.

21 вариант

1. В пространстве даны три некомпланарных вектора **OA=(**1; -1; 2), **OB**=(1; 0; 1), **OC**=(2; 2; -1). Найти координаты вектора **OH**, где H – основание перпендикуляра, опущенного из точки O в плоскость ABC.

2. Даны векторы **a**=(8; 4; 1), **b**=(2; 2; 1), **c**(1; 1; 1). Найти единичный вектор **d,** образующий с векторами **a** и **b** равные углы, перпендикулярный вектору **c** и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов **a, b, c** и **a, b, d** имели одинаковую ориентацию, то есть обе были правыми или левыми.

3. Доказать, что если векторы **[a,b]=[c,d]** и **[a,c]=[b,d],** то векторы **(a-d)** и **(b-c)** коллинеарны.

4. Даны три силы $\mathbf{F_1}$=(2; -1; 3), $\mathbf{F_2}$=(1; 4; -3), $\mathbf{F_3}$=(-6; -4; 2), приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается вдоль вектора **r**=(-2; -3; 4).

5. В тетраэдре ABCD даны ребра, выходящие из вершины D: **DA=a, DB=b, DC=c**. Выразить через эти векторы медиану AL грани ABC.

6. Даны три вектора **a**=(3; -1), **b**=(1; -2), **c**=(-1; 7). Определить разложение вектора **p=a+b+c** по базису **{a, b}**.

22 вариант

1. Чему равен косинус угла между диагональю куба и его ребром.

2. Пусть **a**, **b**, **c** образуют базис пространства. Доказать, что координаты x, y, z любого вектора **d** в этом базисе могут быть найдены по формулам: $x=\frac{(\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$; $y=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{d},\mathbf{c})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$; $z=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$.

3. Доказать, что векторное равенство $[\mathbf{i},\mathbf{u}_1]+[\mathbf{j},\mathbf{u}_2]+[\mathbf{k},\mathbf{u}_3]=\mathbf{o}$ равносильно трем скалярным: $(\mathbf{k},\mathbf{u}_2)-(\mathbf{j},\mathbf{u}_3)=0$, $(\mathbf{i},\mathbf{u}_3)-(\mathbf{k},\mathbf{u}_2)=0$, $(\mathbf{j},\mathbf{u}_1)-(\mathbf{i},\mathbf{u}_2)=0$.

4. Три силы $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$, приложенные к одной точке, направлены под углом 30° друг к другу. Определить величину их равнодействующей **R**, если известно $|\mathbf{F_1}|=1$, $|\mathbf{F_2}|=16$, $|\mathbf{F_3}|=7$.

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\mathbf{AA_1=r}$, $\mathbf{A_1C=s}$, $\mathbf{AB=t}$. Выразить векторы $\mathbf{B_1D}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AD}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AC_1}$ через **r, s, t.**

6. В треугольнике ABC проведены медиана BK и средняя линия MN, параллельная AC. Прямые BK и MN пересекаются в точке O. Найти координаты векторов **CM, OB, KM**, принимая за базис **{OC, OM}**.

23 вариант

1. Векторным методом доказать теорему косинусов.
2. Пусть $\mathbf{a}=a_x\mathbf{e_1}+ a_y\mathbf{e_2}+a_z\mathbf{e_3}$, $\mathbf{b}=b_x\mathbf{e_1}+b_y\mathbf{e_2}+b_z\mathbf{e_3}$, $\mathbf{c}=c_x\mathbf{e_1}+c_y\mathbf{e_2}+c_z\mathbf{e_3}$, где $\mathbf{e_1}=\lambda_1\mathbf{i}$, $\mathbf{e_2}=\lambda_2\mathbf{j}$, $\mathbf{e_3}=\lambda_3\mathbf{i}$. Доказать, что $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})= \lambda_1*\lambda_2*\lambda_3*\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.
3. Убедиться, что векторы **a**=(2; 1; 2) и **b**=(-2; 2; 1), отложенные от одной точки, можно взять в качестве ребер куба, и найти третье ребро куба, идущее из той же вершины.
4. Два корабля движутся со скоростью $\mathbf{V_1}$ и $\mathbf{V_2}$ под углом 30° друг другу. Найти скорость второго относительно первого.

5. Дана правильная прямоугольная пирамида SABCD, SF – медиана грани SDC, (**AC**,**BD**)=0. Выразить векторы **BD, SF, AB** через векторы **AS=a, AD=b, SB=c.**

6. При каких значения коэффициента α векторы $\mathbf{p}=\alpha*\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathbf{g}=\mathbf{a}+\alpha*\mathbf{b}$ образуют базис, если **a**=(2; -3), **b**=($\frac{1}{2}$; 2)?

24 вариант

1. Зная векторы **a** и **b**,на которых построен параллелограмм, выразите через них вектор высоты, перпендикулярной стороне а.
2. Вычислить **(a, b, c)**, если **a**=2**m**+3**n**-**p**, **b**=**m**-**n**+**p**, **c**=4**m**-2**n**+3**p**; **m, n, p** – единичные векторы, образующие правую тройку **(p,[m,n])=** **=(m, n)=**$\frac{\pi}{6}$; **p** ортогонален векторам **m** и **n**.
3. Построить параллелограмм на векторах **a**=2**i**+**k**, **b**=**i**+2**k.** Вычислить площадь и высоту.

4. Пусть в данных точках $A(x_1,y_2,z_3)$, $B(x_1,y_2,z_3)$ помещены соответственно массы m_1, m_2. Найти координаты центра тяжести M этой системы масс.

5. Доказать, что отрезки, соединяющие середины диагоналей трапеций, параллельны основанию.

6. Базисные векторы $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$, длины которых равны соответственно 2 и 3, образуют угол, равный 120°. Определить координаты вектора **a** в базисе $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\}$, если $|\mathbf{a}|=3$ и направление **a** по биссектрисе угла между $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$.

25 вариант

1. Длина гипотенузы треугольника ABC равна c. Вычислить сумму $\mathbf{AB}*\mathbf{AC}+\mathbf{BC}*\mathbf{BA}+\mathbf{CA}*\mathbf{CB}$.

2. Найти вектор **c**, $|\mathbf{c}|=13$, ортогональный векторам $\mathbf{a}=\mathbf{i}+1\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+3\mathbf{k}$ и направленный так, что упорядоченная тройка векторов **a**, **b**, **c** – правая.

3. Вычислить площадь параллелограмма ABCD, если $\mathbf{AB}=5\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{AC}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|=7$, $|\mathbf{b}|=2$, $(\mathbf{a},\mathbf{b})=\dfrac{\pi}{6}$.

4. На тело массой 2 кг действуют силы $F_1=3$Н и $F_2=4$Н под углами 60° и 120° к начальной скорости $V_0=20$м/с. Найти ускорение тела к концу 10-й секунды движения.

5. В параллелограмме ABCD вершина B соединена с серединой Q стороны AD. Найти в каком отношении отрезок BQ делит диагональ AC.

6. В правильном шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ имеем $\mathbf{A_1A_2}=\mathbf{a}$, $\mathbf{A_1A_6}=\mathbf{b}$. Разложить по базису **a**, **b** векторы $\mathbf{A_1A_3}$, $\mathbf{A_1A_4}$, $\mathbf{A_1A_5}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанасян Л.С.* Аналитическая геометрия. М.: Просвещение. Ч. 1, 1967.

1. *Атанасян Л.С.* Геометрия. М.: Просвещение. Ч. 1, 1973.

2. *Атанасян Л.С., Атанасян В.А.* Сборник задач по геометрии. М.: Просвещение. Ч. 1, 1973.

3. *Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П.* Геометрия. М.: Просвещение. Ч. 1, 1973.

4. Сборник задач по геометрии / Под общ. ред. В.Т. Базылева. М.: Просвещение. 1980.

5. *Майоров В.М., Скопец З.А.* Векторное решение геометрических задач. М.: Просвещение, 1968.

6. *Погорелов А.В.* Геометрия. М.: Наука, 1983.

7. *Цубербиллер О.М.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.

8. *Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск: Высшая школа, 1968.

9. *Окунев Л.Я.* Высшая алгебра. М.: Просвещение, 1966.

10. *Фадеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.

11. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1977.

12. *Окунев Л.Я.* Сборник задач по высшей алгебре. М.: Просвещение, 1964.